Álgebra e Funções na Educação Básica

Maria Laura Magalhães Gomes

Álgebra e Funções na Educação Básica

Belo Horizonte
CAED-UFMG
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Prof. Clélio Campolina Diniz
Reitor

Profª. Rocksane de Carvalho Norton
Vice-Reitoria

Profª. Antônia Vitória Soares Aranha
Pró Reitora de Graduação

Prof. André Luiz dos Santos Cabral
Pró Reitor Adjunto de Graduação

CENTRO DE APOIO DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA

Prof. Fernando Selmar Rocha Fidalgo
Diretor de Educação a Distância

Prof. Wagner José Corradi Barbosa
Coordenador da UAB/UFMG

Prof. André Márcio Picanço Favacho
Coordenador Adjunto da UAB/UFMG

Prof. Eucidio Pimenta Arruda
Coordenador Pedagógico

EDITORA CAED-UFMG

Editor: **Profº Fernando Selmar Rocha Fidalgo**

Produção Editorial: **Cyrana Borges Veloso**
Marcos Vinícius Tarquinio

COLEÇÃO EAD – MATEMÁTICA
Coordenador: **Dan Avritzer**
LIVRO: **Álgebra e Funções na Educação Básica**
Autora: **Maria Laura Magalhães Gomes**
Revisão: **Jussara Maria Frizzera**
Projeto Gráfico: **Departamento de Design/CAED**
Formatação: **Sérgio Luz**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Luciana de Oliveira M. Cunha, CRB-6/2725)

Gomes, Maria Laura Magalhães
G633a Álgebra e funções na educação básica / Maria Laura Magalhães Gomes. – Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.
69 p. : il. ; 27 cm.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-64724-37-2

1. Álgebra. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Prática de ensino. 4. Educação – Brasil. 5. Ensino a distância. I. Universidade Federal de Minas Gerais. Centro de Apoio à Educação a Distância. II. Título.

CDD 512
CDU 512

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este texto foi escrito como material para a disciplina Álgebra e Funções na Educação Básica, que integra a matriz curricular proposta para o 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática a distância da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

O objetivo geral da disciplina é promover entre os professores em formação uma melhor compreensão sobre as questões referentes ao ensino e à aprendizagem da álgebra e das funções na escola básica brasileira. Mais especificamente, pretende-se:

1) aprofundar o conhecimento que o futuro professor já tem de suas vivências anteriores sobre álgebra e funções, visando à preparação para a docência na escola básica;

2) abordar aspectos referentes ao pensamento algébrico e à linguagem algébrica em vínculo com o ensino e a aprendizagem da álgebra na escola básica;

3) focalizar aspectos históricos do desenvolvimento da álgebra e de seu ensino, relacionando-os às questões do ensino e aprendizagem escolares;

4) estudar as dificuldades em relação à aprendizagem da álgebra escolar, com atenção aos principais erros usualmente encontrados entre os alunos de diferentes níveis de ensino.

As questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem do tema aqui focalizado, extremamente relevante nas propostas curriculares para os ensinos fundamental e médio no Brasil, são, simultaneamente, diversas e complexas. Considerando-se o espaço disponível para contemplá-las no curso, precisamos realizar escolhas que, sabemos, são insuficientes para prover o futuro professor dos conhecimentos que lhe serão necessários no exercício da docência sobre os tópicos algébricos. Procuramos, então, selecionar alguns assuntos cujo estudo possa ser um ponto de partida para futuros aprofundamentos por parte do docente[1].

Os assuntos escolhidos para compor o presente texto referem-se a um escopo vasto: tivemos a intenção de contemplar, entre outros, as várias concepções de álgebra e papéis das letras ou "variáveis"; dimensões históricas da álgebra e de seu ensino no Brasil; perspectivas atuais para o trabalho pedagógico com a álgebra na escola básica; pensamento algébrico e linguagem algébrica; erros em álgebra.

Organizamos o livro em quatro unidades, sendo cada uma delas composta por um texto e um conjunto de atividades a ele relacionadas.

1 Acreditamos que, para isso, consultas à bibliografia apresentada ao final deste texto poderão dar uma boa contribuição.

A primeira unidade, "A álgebra na escola básica e os papéis das variáveis", chama a atenção para um aspecto fundamental – a questão dos significados das letras, em geral chamadas de "variáveis". Procura-se evidenciar a existência de diversos desses significados, que podem ser associados a diferentes concepções para a álgebra, todas elas importantes no ensino básico. As letras não representam sempre o mesmo papel, e o estudante precisa não apenas compreender esses diferentes papéis, mas também realizar ações variadas vinculadas a esses papéis no contexto das atividades que realiza na escola. A compreensão quanto à natureza multifacetada das "variáveis" e da álgebra na escola básica, que pode passar despercebida quando apenas se resolvem exercícios associados aos conteúdos algébricos, nos parece algo primordial na formação do professor, e essa foi a razão pela qual optamos por iniciar o texto com a abordagem desse tema.

Na segunda unidade, "Sobre o desenvolvimento histórico da álgebra e da linguagem algébrica", focalizam-se inicialmente, de forma extremamente sucinta, as linhas gerais do percurso dos conhecimentos hoje identificados como inseridos no domínio da álgebra. O propósito é situar o licenciando em relação ao fato de esse campo matemático de tanta relevância no Ensino Básico ser usualmente organizado, segundo os historiadores, em duas grandes etapas cronológicas – a da álgebra clássica, desenvolvida até o final do século XVIII, e a da álgebra abstrata, produzida a partir do início do século XIX. Em seguida, confere-se destaque ao desenvolvimento histórico da linguagem algébrica, considerando-se a importância de o futuro professor ter ciência de que a linguagem atual é fruto do trabalho de muitos séculos. Não se deve, portanto, esperar que os estudantes no Ensino Básico adquiram rapidamente o conhecimento e o manejo das regras e símbolos dessa linguagem – na realidade, é muito frequente que eles apresentem grandes dificuldades em relação a isso. Em particular, o texto chama a atenção para a proposta do alemão Georg Nesselmann (1811-1881) quanto à existência de três fases (às vezes superpostas) para a linguagem algébrica: a fase retórica, a fase sincopada e a fase simbólica.

Se é importante que o professor tenha noções acerca do desenvolvimento histórico da álgebra e de sua linguagem, não é menos relevante que ele conheça, também, um pouco sobre o percurso histórico do ensino da álgebra no Brasil. Esse é o tema da terceira unidade, denominada "Aspectos históricos e perspectivas atuais do ensino de álgebra no Brasil." Esse percurso pode ser caracterizado em três momentos, assinalados pelo período em que teve hegemonia o conjunto de ideias associado ao que se convencionou chamar, em nosso país, movimento da matemática moderna: de fato, o ensino da álgebra entre nós pode ser diferenciado em seus aspectos gerais antes, durante e depois desse movimento. Além de procurar enfatizar as características de cada um desses momentos[2], a unidade dedica espaço a uma perspectiva mais atual de ensino da álgebra – a do desenvolvimento do pensamento algébrico. Busca-se, aí, ir além da perspectiva mais tradicional de ensino, centrada na manipulação da linguagem algébrica, muitas vezes sem significado para o aluno. Sem, evidentemente, negligenciar a necessidade de que essa linguagem seja aprendida, procura-se oferecer condições para que o estudante avance no pensamento algébrico e, ao mesmo tempo, tenha acesso a essa linguagem de modo significativo.

2 Usamos como referência, para tal, trabalhos de Antonio Miguel, Dario Fiorentini e Maria Ângela Miorim, pesquisadores da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

A quarta e última unidade, “Erros em álgebra”, aborda as principais dificuldades e enganos cometidos pelos estudantes da Escola Básica, enganos esses que, muitas vezes, persistem até mesmo em níveis mais avançados de ensino. Observa-se que a maior parte dessas dificuldades e enganos resulta de problemas na transição conceitual da aritmética para a álgebra ou de falsas generalizações sobre operadores ou números. Em relação à transição da aritmética para a álgebra, os erros se vinculam a três aspectos principais: a natureza e o significado dos símbolos e das letras; o objetivo da atividade e a natureza das respostas em álgebra; a compreensão da aritmética por parte dos estudantes. Já as falsas generalizações sobre operadores ou números costumam conduzir os estudantes a um uso inapropriado de “fórmulas” ou de “regras de procedimentos”. A unidade discute, ainda, de maneira breve, a questão da correção dos erros e chama a atenção para as dificuldades relacionadas à sua superação.

Para concluir esta apresentação, expresso meus agradecimentos ao professor Dan Avritzer pelo convite para ministrar, pela primeira vez, no curso de Licenciatura em Matemática a distância, a disciplina Álgebra e Funções na Educação Básica, bem como para organizar seu material bibliográfico. Agradeço, também, à professora Maria Cristina Costa Ferreira, pelas muitas e essenciais contribuições representadas por sua leitura e sugestões para a escrita deste texto, bem como pelas oportunidades de compartilharmos experiências de formação de professores no que diz respeito às questões referentes ao ensino da álgebra.

Belo Horizonte, janeiro de 2013

Maria Laura Magalhães Gomes

NOTA DO EDITOR

A Universidade Federal de Minas Gerais atua em diversos projetos de Educação a Distância, que incluem atividades de ensino, pesquisa e extensão. Dentre elas, destacam-se as ações vinculadas ao Centro de Apoio à Educação a Distância (CAED), que iniciou suas atividades em 2003, credenciando a UFMG junto ao Ministério da Educação para a oferta de cursos a distância.

O CAED-UFMG (Centro de Apoio à Educação a Distância da Universidade Federal de Minas Gerais), Unidade Administrativa da Pró-Reitoria de Graduação, tem por objetivo administrar, coordenar e assessorar o desenvolvimento de cursos de graduação, de pós-graduação e de extensão na modalidade a distância, desenvolver estudos e pesquisas sobre educação a distância, promover a articulação da UFMG com os polos de apoio presencial, como também produzir e editar livros acadêmicos e/ou didáticos, impressos e digitais, bem como a produção de outros materiais pedagógicos sobre EAD.

Em 2007, diante do objetivo de formação inicial de professores em serviço, foi criado o Programa Pró-Licenciatura com a criação dos cursos de graduação a distância e, em 2008, com a necessidade de expansão da educação superior pública, foi criado pelo Ministério da Educação o Sistema Universidade Aberta do Brasil – UAB. A UFMG integrou-se a esses programas, visando apoiar a formação de professores em Minas Gerais, além de desenvolver um ensino superior de qualidade em municípios brasileiros desprovidos de instituições de ensino superior.

Atualmente, a UFMG oferece, através do Pró-licenciatura e da UAB, cinco cursos de graduação, quatro cursos de pós-graduação *lato sensu*, sete cursos de aperfeiçoamento e um de atualização.

Como um passo importante e decisivo, o CAED-UFMG decidiu, neste ano de 2011, criar a Editora CAED-UFMG como forma de potencializar a produção do material didático a ser disponibilizado para os cursos em funcionamento.

Fernando Selmar Rocha Fidalgo
Editor

1

A álgebra na escola básica e os papéis das variáveis

UNIDADE 1: A ÁLGEBRA NA ESCOLA BÁSICA E OS PAPÉIS DAS VARIÁVEIS

Este texto é uma adaptação do artigo de Zalman Usiskin intitulado "Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis", que integra o livro *As ideias da álgebra*, publicado no Brasil em 1994 pela Editora Atual.

O QUE É A ÁLGEBRA DA ESCOLA BÁSICA?

A álgebra da escola básica se relaciona à compreensão do significado das "letras", comumente chamadas atualmente de "variáveis", e das operações com elas. Em geral, consideramos que os alunos estão estudando álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez. Porém, como o próprio conceito de variável é multifacetado, se reduzirmos a álgebra ao estudo das "variáveis", não seremos capazes de responder satisfatoriamente à pergunta: "o que é a álgebra da escola básica"?

De fato, consideremos as seguintes igualdades, todas elas com a mesma forma (o produto de dois números é igual a um terceiro):

1) $A = b.\ h$
2) $40 = 50\ x$
3) $sen\ x = cos\ x.\ tg\ x$
4) $1 = n.\ (1/n)$
5) $y = kx$

Cada uma das igualdades tem um caráter diferente. Comumente chamamos 1) de <u>fórmula</u>; 2) de <u>equação</u>; 3) de <u>identidade</u>; 4) de <u>propriedade</u>; 5) de <u>expressão de uma função</u> que traduz uma proporcionalidade direta e não é para ser resolvida. Esses diversos nomes refletem os diferentes usos dados à idéia de variável. Pode-se perceber que as letras representam papéis diferentes em cada caso.

Assim, em 1), A, b e h representam a área, a base e a altura de um retângulo ou paralelogramo e têm o caráter de uma coisa conhecida. Em 2), tendemos a pensar em x como uma incógnita. Em 3), x é o que denominamos o argumento de uma função. A equação 4), diferentemente das outras, generaliza um modelo aritmético (o produto de um número por seu inverso é 1). Nela, n indica um exemplo do modelo. Em 5), x é mais uma vez o argumento de uma função, y o valor da função e k uma constante ou parâmetro, dependendo de como a letra é usada.

Notemos que apenas em 5) há o caráter de "variabilidade", do qual resulta o termo <u>variável</u>. O que se evidencia, portanto, quando examinamos o significado das letras em cada igualdade, é que, em álgebra, não há uma única concepção para a variável.

Segundo Zalman Usiskin, as finalidades do ensino de álgebra, as concepções que temos sobre a álgebra na escola básica e a utilização das variáveis são coisas intrinsecamente relacionadas:

> **As finalidades da álgebra** são determinadas por, ou relacionam-se com, **concepções** diferentes **da álgebra** que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos **usos das variáveis**. (USISKIN, 1995, p. 13, negritos no original).

Usiskin identifica quatro diferentes concepções de álgebra, associadas a diferentes usos ou papéis da "variável", as quais são apresentadas a seguir.

CONCEPÇÃO 1: A ÁLGEBRA COMO ARITMÉTICA GENERALIZADA

Nesta concepção, é natural pensar as "variáveis" como generalizadoras de modelos. Por exemplo, generaliza-se uma igualdade como $3 + 5 = 5 + 3$, na qual a ordem das parcelas não altera a soma, escrevendo-se $a + b = b + a$.

Outros exemplos são:

1) os números pares positivos, $2 = 2.\ 1$, $4 = 2.\ 2$, $6 = 2.\ 3$, $8 = 2.\ 4$, podem ser representados por $2.\ n$, ou $2n$, onde consideramos que n representa qualquer número inteiro positivo;
2) expressamos a proposição aritmética que diz que o produto de qualquer número por zero é zero escrevendo $x.\ 0 = 0$, para todo x (a letra x representa um número genérico qualquer, não assumindo o significado de incógnita nem de variável).

Nessa concepção de álgebra como aritmética generalizada, as ações importantes para o estudante da escola básica são as de <u>traduzir</u> e <u>generalizar.</u>

CONCEPÇÃO 2: A ÁLGEBRA COMO ESTUDO DE PROCEDIMENTOS PARA RESOLVER CERTOS TIPOS DE PROBLEMAS

Consideremos o seguinte problema: adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 43. Achar o número. O problema é traduzido para a linguagem da álgebra da seguinte maneira: $5x + 3 = 43$. Essa equação é o resultado da <u>tradução</u> da situação do problema para a linguagem algébrica, e ao fazer isso, trabalhamos segundo a Concepção 1. Na concepção de álgebra como estudo de procedimentos, temos que continuar o trabalho resolvendo a equação. Por exemplo, se somarmos -3 a ambos os membros da equação, teremos:

$5x + 3 + (-3) = 43 + (-3)$. Simplificando, obtemos: $5x = 40$, e encontramos $x = 8$. Assim, o "certo número" do problema é 8, e facilmente se testa esse resultado, calculando $5.\ 8 + 3 = 43$.

Ao resolver problemas desse tipo, muitos alunos têm dificuldades na passagem da aritmética para a álgebra. Enquanto a resolução aritmética ("de cabeça") consiste em subtrair 3 de 43 e dividir o resultado por 5, a forma algébrica $5x + 3$ envolve a multiplicação por 5 e a adição de 3, que são as operações inversas da subtração $43 - 3$ e da divisão $40: 5$. Isto é, para armar a equação, devemos raciocinar exatamente de maneira oposta à que empregaríamos para resolver o problema aritmeticamente.

Nesta segunda concepção de álgebra, as variáveis são ou *incógnitas* ou *constantes*. Enquanto as instruções-chave no uso de uma variável como generalizadora de modelos são traduzir e generalizar, na concepção da álgebra como um estudo de procedimentos para resolver problemas, as instruções-chave são simplificar e resolver. O aluno, nessa concepção, precisa dominar não apenas a capacidade de equacionar os problemas (isto é, traduzi-los para a linguagem algébrica em equações), como também precisa ter habilidades em manejar matematicamente essas equações até obter a solução. A letra aparece não como algo que varia, mas como uma incógnita, isto é, um valor a ser encontrado.

CONCEPÇÃO 3: A ÁLGEBRA COMO ESTUDO DE RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS

Quando escrevemos a fórmula da área de um retângulo, $A = b.\ h$, estamos expressando uma relação entre três grandezas. Não se tem a sensação de se estar lidando com uma incógnita, pois não estamos resolvendo nada. Fórmulas como essa transmitem uma sensação diferente de generalizações como $1 = n.\ (1/n)$, mesmo que se possa pensar numa fórmula como um tipo especial de generalização.

Considerando que a concepção de álgebra como estudo de relações entre grandezas pode começar com fórmulas, a distinção crucial entre esta concepção e a anterior é que, nela, as "variáveis" realmente variam. Que há uma diferença fundamental entre essas duas concepções fica evidente pela resposta que os alunos geralmente dão à seguinte pergunta: o que ocorre com o valor de $1/x$ quando x se torna cada vez maior?

A questão parece simples, mas é suficiente para confundir os alunos. Não estamos perguntando qual é o valor de x, portanto x não é uma incógnita. Também não estamos pedindo ao aluno que traduza. Há um modelo a ser generalizado, mas não se trata de um modelo que se pareça com a aritmética (não teria sentido perguntar o que aconteceria com o valor de ½ quando 2 se torna cada vez maior). Trata-se de um modelo fundamentalmente algébrico.

Dentro desta terceira concepção, a álgebra se ocupa de modelos e leis funcionais que descrevem ou representam as relações entre duas ou mais grandezas variáveis. Uma variável é um argumento (isto é, representa os valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (isto é, um número do qual dependem outros números).

O fato de "variáveis" e argumentos diferirem de variáveis e incógnitas se evidencia na seguinte questão: achar a equação da reta que passa pelo ponto (6, 2) e tem inclinação 11.

Uma forma habitual de resolver esse problema combina todas as utilizações das "variáveis" apresentadas até aqui. Costuma-se começar a partir do fato conhecido de que os pontos de uma reta estão relacionados por uma equação do tipo $y = mx + b$. Temos aqui tanto um modelo entre variáveis como uma fórmula. Embora, para o professor, x e y sejam encarados como variáveis e m represente um parâmetro (quando m varia, obtemos todas as retas do plano não-verticais), para o aluno pode não ficar claro se o argumento é m, x ou b. Pode parecer que todas as letras sejam incógnitas (particularmente x e y, letras consagradas pela tradição para representar incógnitas).

Vejamos a resolução. Como conhecemos m (que representa a inclinação da reta), substituímos essa letra pelo seu valor, obtendo $y = 11x + b$. Vemos, então, que, no caso específico do problema, m é uma constante, não um parâmetro. Agora precisamos achar b, de modo que b não é um parâmetro, e sim uma incógnita. Como achar b? Usamos um par entre os muitos pares de valores associados x e y. Isto é, escolhemos um valor do argumento x para o qual conhecemos o valor associado de y. Podemos fazer isso em

$y = mx + b$ porque essa relação descreve um modelo geral entre números. Com a substituição, $2 = 11.\ 6 + b$, e, portanto, o valor de b é -64. Mas não achamos x e y, embora tenhamos dado valores para eles, porque não eram incógnitas. Achamos apenas a incógnita b e substituímos seu valor na equação modelo, obtendo finalmente a resposta do problema: $y = 11x - 64$.

CONCEPÇÃO 4: A ÁLGEBRA COMO ESTUDO DAS ESTRUTURAS

No curso superior de Matemática, o estudo de álgebra envolve estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais. Isso parece ter pouca semelhança com a álgebra da escola básica, embora sejam essas estruturas que fundamentam a resolução de equações nesse nível de ensino. Contudo, podemos reconhecer a álgebra como estudo das estruturas na escola básica pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios. Consideremos os problemas a seguir.

1) Determine $(a + x)(b - 1)$.

2) Fatorar a expressão $ax + ay - bx - by$.

A concepção de "variável", nesses dois exemplos, não coincide com nenhuma daquelas discutidas anteriormente. Não se trata de nenhuma função ou relação, ou seja, a "variável" não é um argumento, como na concepção 3. Não há qualquer equação a ser resolvida, de modo que a "variável" não atua como uma incógnita, como na concepção 2. Do mesmo modo, não estamos dentro da concepção 1, já que não há qualquer modelo aritmético a ser generalizado. Olhemos para as respostas dos problemas.

1) $ab - a + bx - x$;

2) $(a - b)(x + y)$.

Nos dois problemas, as "variáveis" são tratadas como sinais no papel, sem qualquer referência numérica.

O que caracteriza a "variável" na concepção da álgebra como estudo de estruturas é o fato de ser pouco mais do que um símbolo arbitrário. Observe-se que as atividades conhecidas como de cálculo algébrico, que são muito frequentes no currículo usual da escola básica (produtos notáveis, fatoração, operações com monômios e polinômios) situam-se no âmbito da concepção 4.

Resumo

Podemos sintetizar a discussão acima sobre as diferentes concepções de álgebra relacionadas como os diferentes usos das variáveis por meio do seguinte quadro:

Concepção de álgebra	Uso ou papel das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Estudo de procedimentos para resolver problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações entre grandezas	Argumentos, parâmetros (relacionar, fazer gráficos)
Estudo de estruturas	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Referências

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P.(Org). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1994.

O título do texto original é Conceptions of School Algebra and Uses of Variables, e o mesmo pode ser encontrado em http://www.msri.org/attachments/workshops/454/Usiskin-Conceptions%20of%20School%20Algebra.pdf (Acesso em 07/09/2012).

ATIVIDADES REFERENTES À UNIDADE 1

As concepções de álgebra na escola básica apresentadas por Usiskin no texto "A álgebra na escola básica e os papéis das variáveis" são:

a) álgebra como aritmética generalizada (as "variáveis" generalizam modelos);
b) álgebra como estudo de procedimentos para resolver problemas (as "variáveis" são incógnitas ou constantes);
c) álgebra como estudo das relações entre grandezas (as "variáveis" são argumentos ou parâmetros);
d) álgebra como estudo de estruturas (as "variáveis" são sinais no papel).

Abaixo são apresentados exemplos de conteúdos matemáticos abordados no Ensino Básico nos quais aparecem letras ou "variáveis". Depois de estudar o texto "A álgebra na escola básica e os papéis das variáveis", indique, para cada exemplo, qual ou quais das concepções de álgebra referidas no texto está presente. Justifique suas respostas relacionando a caracterização de cada concepção no texto ao papel representado pelas letras.

Exemplo 1

Uma indústria produz uma marca de café misturando as variedades tupi e catuaí amarelo. O café tupi, depois de processado, tem o custo de R$ 2,40 por quilograma, e o catuaí amarelo, de R$2,80. Se o custo de $1kg$ da mistura das duas variedades, após processamento, é R$2,64, quanto há de cada variedade em $1kg$ da mistura?

Para resolver esse problema, vamos indicar por x e y, respectivamente, as quantidades de café tupi e de café catuaí amarelo que compõem $1\ kg$ da mistura. Assim formamos o sistema:

$x + y = 1$

$2{,}4x + 2{,}8y = 2{,}64$, que é equivalente ao sistema

$y = 1 - x$ (I)

$2{,}4x + 2{,}8y = 2{,}64$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$2{,}4x + 2{,}8(1 - x) = 2{,}64$, o que implica

$2{,}4x + 2{,}8 - 2{,}8x = 2{,}64$, donde $x = 0{,}4$.

Substituindo x por $0{,}40$ em (I), obtemos $y = 0{,}60$.

Concluímos que $1kg$ dessa mistura contém $0{,}4kg$ de café tupi e $0{,}6kg$ de café catuaí amarelo.

Exemplo 2

A altura *h* de um homem varia com o tamanho *F* do seu fêmur de acordo com a fórmula (medidas em cm):

$h = 69{,}089 + 2{,}238\ F$

Se a idade ultrapassa 30 anos, subtraem-se 0,06 cm para cada ano após os 30 anos. Qual é a altura estimada de um homem de 40 anos cujo fêmur mede 40 cm?

Exemplo 3

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + b_1 x + b_0.$$

Definimos a diferença entre $P(x)$ e $Q(x)$ como o polinômio

$$P(x) - Q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + (a_{n-2} - bn_{-2})\, x^{n-2} + \ldots + (a_1 - b_1)\, x + (a_0 - b_0)\ .$$

Exemplo 4

Sendo *a* um número real e *n* um número inteiro, temos:

$a^0 = 1,\ se\ a \neq 0$

$a^1 = a$

$a^n = a.\ a.\ a\ ....\ a$ (n fatores), se $n > 1$

$a^{-n} = 1/a^n$, se $a \neq 0$.

Na potência a^n, o número a é chamado de base da potência e o número n é chamado de expoente.

Exemplo: $(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = -8$

Exemplo 5

Uma bala é atirada de um canhão e descreve uma parábola de equação $Y = -3X^2 + 60\ X$ (sendo X e Y medidos em metros). Determinar:

a) a altura máxima atingida pela bala;

b) o alcance do disparo.

Exemplo 6

Uma papelaria vende apenas três tipos de canetas esferográficas, A, B e C, aos preços unitários de R$1,00, R$2,00 e R$3,00 respectivamente. Uma pessoa pretende gastar R$15,00 nessa papelaria, comprando apenas canetas, com pelo menos uma de cada tipo. Quantas são as possibilidades de compra?

Indicando por a, b e c as quantidades de canetas adquiridas dos tipos A, B e C respectivamente, e observando os valores de cada uma delas, temos $a + 2b + 3c = 15$ e, portanto, $a = 15 - 2b - 3c$.

Como a, b e c são números naturais não nulos, deduzimos que:

Para $b = 1$, o maior valor possível de c é 4, pois para c maior que 4 teríamos como valor de a um número negativo. Para $b = 2$, o maior valor possível de c é 3; para $b = 3$, o maior valor possível de c é 2; para $b = 4$, o maior valor possível de c é 2. Para $b = 5$, o maior valor possível de c é 1. Notemos que o valor 5 é o máximo possível para b, pois a deve ser inteiro positivo.

Exemplo 7

Sendo a e b números reais e m e n números naturais, valem as seguintes propriedades:

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0 \ e \ m \geq n)$$

$$(a.b)^n = a^n . b^n$$

$$(a/b)^n = a^n/b^n \ (b \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Exemplo 8

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$(s + t)^3 = s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3$$

Exemplo 9

A equação $y = 2x + t$ representa todas as retas do plano cujo coeficiente angular é 2.

2 Sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra e da Linguagem Algébrica

UNIDADE 2: SOBRE O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA ÁLGEBRA E DA LINGUAGEM ALGÉBRICA

Os conhecimentos de álgebra presentes nas propostas curriculares para o ensino básico resultam de milênios de desenvolvimento da matemática. Em alguns dos documentos mais antigos dessa história, os papiros do Egito antigo e os tabletes de argila dos babilônios, estão registrados problemas relacionados à resolução de equações, tema que, até o século XVIII, foi concebido quase como um sinônimo da palavra "álgebra". Se conhecimentos que hoje associamos à álgebra são tão remotos, é preciso enfatizar que a palavra "álgebra" está registrada historicamente somente na Idade Média, em um momento bem posterior. Considera-se que ela aparece pela primeira vez no título de um livro escrito em Bagdá por volta do ano 825 (século IX) pelo matemático e astrônomo Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi (Mohammed, filho de Musa, natural de Khwarizmi[1], na antiga Pérsia), que mostra, em seus trabalhos, a solução geral das equações de primeiro e segundo graus. O livro de al-Khwarizmi tem o título *Al-jabr w'al-muqabalah*, para o qual há várias versões em nossa língua: *O livro sumário sobre cálculos por transposição e redução* ou *A ciência da restauração e oposição,* ou, ainda, *A ciência da transposição e da eliminação*[2].

O historiador Victor Katz[3] ressalta que, embora hoje seja raro encontrarmos uma definição de álgebra nos livros destinados ao ensino, essa não era a situação no século XVIII. Matemáticos como Colin Maclaurin (1698-1746), Leonhard Euler (1707-1783) e Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) conceituaram a álgebra como simultaneamente um cálculo generalizado mediante regras para manipular sinais e signos e um método para resolver problemas.

Os livros que atualmente usamos no ensino não costumam definir a álgebra, mas contêm uma grande variedade de tópicos que associamos a esse campo. Esses tópicos abrangem mais do que a essência daquilo que os matemáticos do século XVIII incluíam na álgebra, a saber, cálculos generalizados, linguagem simbólica e resolução de equações.

Apesar de não termos a intenção de apresentar, neste texto, um panorama do desenvolvimento da álgebra, é oportuno lembrar que é comum os historiadores considerarem duas grandes etapas no percurso histórico desse ramo do conhecimento

1 Essa localidade está situada no atual Uzbequistão.

2 A palavra "álgebra" vem de *al-jabr*, que significa a transferência de termos de um para outro membro de uma equação. Já *al-muqabalah* se relaciona ao cancelamento de termos iguais em ambos os membros de uma equação. Apresentamos, a seguir, um exemplo, no qual os dois procedimentos estão registrados na notação usada atualmente. Consideremos a equação $x^2 + 3x + 7 = 7 - 2x + 4x^3$. Por *al-jabr*, essa equação é equivalente à equação $x^2 + 5x + 7 = 7 + 4x$. Por *al-muqabalah*, ela é equivalente à equação $x^2 + 5x = 4x^3$.

3 Refiro-me especialmente ao seguinte artigo desse autor: Katz, V. Stages in the history of algebra with implications for teaching. **Educational Studies in Mathematics**. 66: 185-201, 2007.

matemático: a da álgebra clássica, desenvolvida até o final do século XVIII, e a da álgebra abstrata, produzida a partir do início do século XIX.

No Brasil, a álgebra abordada na fase que antecede os estudos universitários tem focalizado, sobretudo, conhecimentos do período da álgebra clássica, mas tópicos da álgebra desenvolvida mais modernamente, a álgebra abstrata, tais como matrizes, espaços vetoriais, grupos, anéis e corpos, também participaram ou ainda participam dos currículos matemáticos escolares.

No texto "A álgebra na escola básica e os papéis das variáveis", foi apresentada a visão do pesquisador Zalman Usiskin sobre a presença da álgebra na escola básica, que se fundamenta nos diferentes papéis que as "variáveis" desempenham em quatro concepções desse campo do conhecimento: 1) a álgebra como aritmética generalizada; 2) a álgebra como estudo de procedimentos para resolver problemas; 3) a álgebra como estudo das relações entre grandezas; 4) a álgebra como estudo das estruturas.

Em relação à divisão usual álgebra clássica/álgebra abstrata, a quarta concepção – estudo das estruturas – vincula-se ao que foi realizado historicamente a partir do século XIX, isto é, à álgebra abstrata. Vamos agora retomar a questão da conceituação da álgebra. Em nosso trabalho com licenciandos e professores da escola básica, em resposta à pergunta: "O que a palavra álgebra significa para você?", recolhemos, entre muitas outras semelhantes, as seguintes considerações:

<u>Resposta 1</u>: Acredito que a álgebra seja a parte da matemática que trata dos símbolos, seus significados, operações e propriedades. A álgebra é uma forma de generalização da aritmética, uma forma de fazer operações, tratar de números que não estão disponíveis para os cálculos. A álgebra é a **linguagem que a matemática usa no seu discurso**.

<u>Resposta 2:</u> A palavra álgebra, na minha concepção, está relacionada a raciocínio e cálculo. É a parte da matemática que une generalizações e resolução de problemas. Enquanto professor, vejo a dificuldade dos alunos em traduzir o problema ainda textual em conceitos matemáticos, ou seja, transferir as informações para **linguagem matemática** através do uso de variáveis (letras).

<u>Resposta 3:</u> Considerando minhas experiências como professor e, principalmente, como aluno, posso concluir que o conceito de "álgebra' que possuo gira em torno da capacidade que um indivíduo possui em esquematizar uma dada situação ou problema **na linguagem própria que a matemática possui**. Existem várias maneiras de fazer esse tipo de esquema, e a álgebra teria como um dos objetivos estudar estas maneiras, como a utilização de símbolos e operações.

Essas três respostas, mesmo que destaquem também outros aspectos relacionados à álgebra, como generalização, cálculos, propriedades e a característica instrumental de ferramenta para a resolução de problemas, têm em comum a ênfase na ligação entre álgebra e linguagem, ou seja, realçam a dimensão da álgebra como linguagem da matemática[4].

4 Nas respostas transcritas de trabalhos dos alunos, os destaques são nossos.

Na escola básica, desde o início do Ensino Fundamental, o aluno tem contato com os símbolos dessa linguagem, mas é principalmente a partir do 7º ano que sua presença se acentua, particularmente quando são abordados conteúdos como equações e inequações, sistemas, funções, polinômios. É preciso que o professor tenha em mente que a linguagem algébrica atualmente utilizada foi construída durante um longuíssimo período. Mais comumente, essa circunstância não é levada em conta no processo de ensino-aprendizagem, e as etapas da construção da linguagem algébrica não são consideradas – os professores têm a expectativa de que os estudantes dominem rapidamente os símbolos e regras para seu uso. Verifica-se, contudo, que essa aprendizagem não é algo corriqueiro, e é muito frequente que os alunos apresentem dificuldades.

Além disso, embora a manipulação dos símbolos algébricos seja uma atividade intensamente realizada nas práticas de ensino da matemática, que costumam investir na resolução, pelos estudantes, de numerosos exercícios que a requerem, mesmo aqueles que são capazes de executar essa manipulação com sucesso algumas vezes não compreendem as técnicas que usam. Entretanto, não somente é necessário, mas muito importante, que o aluno compreenda o uso da linguagem simbólica e relacione essa linguagem com a linguagem natural, isto é, com sua língua materna.

Alguns conhecimentos acerca do desenvolvimento histórico da linguagem algébrica podem contribuir para que o professor reflita sobre as dificuldades de seus alunos e compreenda-as. A partir dessa compreensão, ele poderá elaborar estratégias que conduzam a um maior sucesso na aprendizagem dessa linguagem. É com isso em vista que apresentamos, a seguir, um conjunto de estágios frequentemente divulgado em publicações referentes à história da matemática, que trata das transformações ocorridas na linguagem algébrica no transcorrer do tempo.

ESTÁGIOS NA EXPRESSÃO DAS IDEIAS ALGÉBRICAS: A FASE RETÓRICA, A FASE SINCOPADA E A FASE SIMBÓLICA

A distinção de três períodos na evolução da linguagem da álgebra foi estabelecida pelo alemão Georg Heinrich Friedrich Nesselmann (1811-1881), em 1842, na primeira parte de seu livro *Ensaio sobre uma história crítica da álgebra*, intitulada *A álgebra dos gregos*[5]. Segundo Nesselmann, a distinção das três fases vem da consideração de como a representação formal das equações e operações é realizada.

A álgebra na qual os cálculos são expressos completa e detalhadamente por meio da linguagem comum, sem qualquer uso de símbolos e abreviações, é descrita como retórica[6]. Embora na época em que Nesselmann escreveu o seu livro os tabletes da Mesopotâmia não tivessem sido completamente analisados, o uso exclusivo da lin-

5 De acordo com Puig, L. Componentes de uma historia del álgebra. El texto de al-Khwârismî restaurado. In: Hitt, F. (ed.). **Investigaciones en matemática educativa II**. México, D. F.: 1998. Grupo Editorial Iberoamérica, p. 109-131 e Puig, L.; Rojano, T. The history of algebra in mathematics education. In: Stacey, K.; Chick, H.; and Kendal, M. (eds.). **The Future of the Teaching and Learning of Algebra**. Boston: Kluwer, 2004, p. 189-223.

6 Conforme Puig e Rojano, op. cit.

guagem comum na proposição e resolução de problemas considerados algébricos foi constatado desde a época dos antigos babilônios (2000 a 1600 a. C) até o século III, quando o trabalho de Diofanto de Alexandria registra a presença de uma linguagem que não é unicamente a natural. No entanto, no estágio retórico, estaria, por exemplo, ainda, a álgebra de al-Khwarizmi (século IX), em que tanto os problemas como suas soluções são apresentados inteiramente por meio de palavras. Como não se fazia uso nem de símbolos nem de abreviações, sendo as expressões escritas totalmente em palavras, esse estágio também é denominado estágio verbal.

Um exemplo de uso da linguagem retórica é a forma como al-Khwarizmi resolve a equação que escreveríamos como $6x + 4x + 2x = 36$:

> (...) É preciso, em primeiro lugar, que vocês somem seis raízes com quatro raízes e com duas raízes.
>
> Como doze raízes valem o mesmo que trinta e seis unidades, então o valor de uma raiz é três unidades[7].

Outro exemplo se encontra no modo como noções algébricas se apresentavam no trabalho dos gregos Euclides e Apolônio, que viveram no século III a. C. Particularmente, o livro II dos *Elementos* de Euclides, que contém 14 proposições, conhecido como "álgebra geométrica" por apresentar resultados que podem ser facilmente traduzidos para a linguagem algébrica que se desenvolveu muito depois, traz como sua proposição 4 a relação que designamos como o produto notável

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab.$$

Essa relação é apresentada por Euclides num contexto geométrico, somente em palavras, com o seguinte enunciado: "Caso uma linha seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos[8]."

A segunda fase proposta por Nesselmann para a linguagem algébrica é a fase sincopada, em que a exposição ainda é de natureza retórica, mas faz uso de abreviações consistentes para certos conceitos e operações que ocorrem frequentemente. Diofanto de Alexandria teria sido o primeiro a introduzir um símbolo para a incógnita, utilizando uma variante da letra grega sigma. A escolha dessa variante se deve, provavelmente, segundo César Polcino Milies[9], ao fato de, no sistema grego de numeração, em que as letras representavam também números, de acordo com sua posição no alfabeto, a variante da letra sigma não fazer parte do sistema, e, assim, não corresponder a nenhum valor numérico particular. Uma forma sincopada similar à de Diofanto seria, mais tarde, desenvolvida pelos hindus, especialmente por Brahmagupta (século XII). Os europeus até a metade do século XVII se inserem no estágio sinco-

7 Exemplo apresentado em Tinoco, L.A.A. (COORD.) *Álgebra: pensar, calcular, comunicar...*Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ, 2008, p. 32.

8 Conforme Euclides. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009, p. 137.

9 POLCINO MILIES, F. C. **Breve história da álgebra abstrata**. Salvador: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. Disponível em www.bienasbm.ufba.br/M.18.pdf. Acesso em 10 março 2011.

pado. Esse é o caso dos algebristas italianos do século XVI, como Gerolamo Cardano (1501-1576), que, com a expressão "cubus p. 6 rebus aequalis 20" exprimia a equação que, na linguagem simbólica posterior, corresponderia a $x^3 + 6\,x = 20$. Note-se que a expressão usada por Cardano em seu livro *Ars Magna*, publicado em 1545, apresenta os símbolos 6 e 20, palavras e a abreviação "p.", que significa "mais".

François Viète (1540-1603), reconhecido por sua contribuição ao simbolismo pelo uso de consoantes para representar coeficientes e vogais para simbolizar as incógnitas, em sua obra *In artem analyticam isagoge* (Introdução à arte analítica), publicada em 1591, usava linguagem sincopada. Por exemplo, para ilustrar o estilo sincopado de Viète[10], a forma *A quad – B in A* 2*, aequatur Z plano* significava o que representaríamos como $x^2 - 2bx = c$.

A terceira etapa de desenvolvimento da linguagem algébrica, a fase simbólica, caracteriza-se pela expressão das ideias mediante o uso de símbolos, dispensando-se completamente o recurso às palavras da linguagem comum. A etapa simbólica tem início no século XVI e perdura até a atualidade. Viète, que ainda escrevia num estilo sincopado, com sua utilização das vogais para representar as incógnitas e consoantes para designar os coeficientes, é geralmente indicado pelos historiadores como aquele que iniciou a transição da segunda para a terceira e última etapa do simbolismo algébrico. Viète utilizava os sinais germânicos "+" e "–". A equação atualmente simbolizada por $x^5 - 15\,x^4 + 85\,x^3 - 225\,x^2 + 274\,x = 120$ era assim representada por ele: *IQC* – 15 *QQ* + 85*C* – 225 *Q* + 274*N aequatur* 120. Observe-se o estilo sincopado no uso de símbolos e palavras simultaneamente.

Descartes (1596-1650) é visto como aquele que consolidou o uso da linguagem simbólica em *A Geometria*, um dos apêndices do *Discurso do Método*, publicado originalmente em 1637. Nessa obra, escrita em francês, Descartes emprega as primeiras letras do alfabeto para simbolizar as quantidades fixas e as últimas para nomear as incógnitas; ele também usou as notações x, xx, x^3, x^4,... para as potências[11].

Segundo Puig e Rojano[12], para Nesselmann, a fase simbólica se caracteriza pelo fato de todas as principais formas e operações serem representadas em um sistema de signos independente da expressão oral, sem a necessidade de qualquer representação retórica. A partir dessa primeira caracterização da álgebra simbólica por Nesselmann, para esses autores, o fundamental não é a existência de letras para representar quantidades ou de signos estranhos à linguagem comum para representar operações; o aspecto primordial é "o fato de que se pode operar com esse sistema de signos sem ter que se recorrer a sua tradução para a linguagem comum[13]."

No desenvolvimento da linguagem algébrica nas aulas de matemática da escola básica, em geral os estudantes não têm a oportunidade de expressar suas ideias

10 Conforme Puig e Rojano, 2004, op. cit.

11 Conforme Bell, E. T. **Historia de las Matematicas**. Cidade do México: Fondo de Cultura Económica, 1996.

12 Puig e Rojano, 2004, op. cit.

13 Puig e Rojano, 2004, op. cit., p. 199.

usando a linguagem retórica ou verbal ou a linguagem sincopada (misto da linguagem verbal com símbolos). O que normalmente se constata é que ocorre uma imposição abrupta do uso dos símbolos, como se a utilização da linguagem natural tivesse que ser praticamente desprezada. Esse fato se verifica em sentido oposto ao do desenvolvimento histórico da linguagem algébrica, e caracteriza, talvez, uma das dificuldades da aprendizagem desejável para a álgebra na educação escolar[14].

ATIVIDADES REFERENTES À UNIDADE 2

As atividades propostas a seguir têm o objetivo de trabalhar o trânsito entre linguagem natural e linguagem algébrica, em ambos os sentidos, promovendo, também, uma reflexão do futuro professor acerca das dificuldades que essas passagens podem representar para os estudantes da Educação Básica.

Atividade 1

Escreva na forma de uma expressão algébrica:

a) um número aumentado em três unidades	b) um número mais cinco
c) cinco menos um número	d) o dobro de um número
e) o produto de seis por um número	f) o quociente de cinco por um número
g) trinta e cinco aumentado de duas vezes um número	h) doze a menos que duas vezes um número
i) vinte e quatro a menos que três vezes um número	j) cinco vezes um número, mais quatro
k) cinco vezes um número mais quatro	l) o quadrado de um número, menos um
m) o quadrado de um número menos um	n) o triplo de um número mais um
o) seis a menos que a soma de um número e três	p) cinco a menos que o quociente de um número por seis.

Em algum dos itens você teve dúvidas sobre como passar da linguagem natural para a linguagem algébrica? Há mais de uma maneira de fazer isso em algum caso? Qual ou quais? Por quê?

14 De acordo com Tinoco, 2008, op. cit., p. 34.

Atividade 2

a) Em uma universidade, há seis vezes mais alunos do que professores. Expresse essa situação na linguagem algébrica, representando o número de alunos por A e o número de professores por P.

b) Escreva um período em Português que dê a mesma informação que a equação E = 7M, onde M é o número de médicos e E o número de enfermeiras em um hospital.

c) Indique possíveis erros ou dificuldades que, segundo sua opinião, poderiam ser encontrados por alunos da escola básica diante dos itens a) e b). Por que haveria essas dificuldades e erros?

Atividade 3

Preencha o quadro abaixo e responda às perguntas colocadas depois dele.

Instruções	Dê um exemplo	Expresse as instruções usando a linguagem algébrica
Pense em um número		
Ache o seu dobro		
Some 3 ao resultado		
Triplique o que você obteve		
Subtraia 9 do resultado		
Divida tudo por 6		

O que você pode concluir em relação ao resultado obtido e ao número pensado? Explique por que isso acontece.

Atividade 4

Para cada uma das situações abaixo, pede-se que você expresse algebricamente uma determinada situação ou condição.

a) Um produto teve seu preço aumentado em 15%. Expresse o novo preço do produto.
b) Em alguns retângulos, a base tem 4 centímetros a mais que a altura. Expresse a área desses retângulos.
c) A elaboração de um folder custa 5 reais e cada cópia desse folder custa 12 centavos. Expresse o custo da produção de um número qualquer de fôlderes.
d) No programa "A Arca da Felicidade", do famoso animador Juju Literato, um prêmio de 270 reais foi distribuído assim: a menor parte para o terceiro colocado; 50 reais a mais para o segundo colocado; o dobro desta última quantia para o campeão. Expresse algebricamente a situação descrita.

Atividade 5

Para cada item abaixo, escreva em Português o significado de cada expressão algébrica ou situação.

a) $(n - 4)^2$
b) $3.\,x + 15$
c) $(20 - x)/2$
d) Escreva um enunciado para um problema representado pelo seguinte esquema, que mostra como foi distribuída uma herança:

85 camelos

Filho mais jovem: x

Filho do meio: $2.x + 5$

Filho mais velho: $2.\,(2.x + 5)$

Atividade 6

Fui a uma papelaria e comprei o mesmo número de cadernos e agendas. Cada caderno custou 3 reais e cada agenda custou 8 reais. Gastei ao todo 55 reais. Admitindo que a equação $3C + 8A = 55$ está correta, o que está errado (se é que está errado) no raciocínio abaixo? Explique o mais detalhadamente que puder.

> $$3C + 8A = 55$$
>
> Como $C = A$, podemos escrever
>
> $$3C + 8C = 55$$
>
> $$11C = 55$$
>
> A última equação nos diz que 11 cadernos custam 55 reais.
>
> Logo, podemos concluir que um caderno custa 5 reais.

3 Aspectos históricos e perspectivas atuais do ensino da Álgebra no Brasil

UNIDADE 3: ASPECTOS HISTÓRICOS E PERSPECTIVAS ATUAIS DO ENSINO DA ÁLGEBRA NO BRASIL

A história do ensino da álgebra no Brasil pode ser caracterizada a partir de três momentos: antes, durante e depois do movimento da matemática moderna. Nesses períodos, manifestaram-se e repercutiram no país diferentes concepções de educação algébrica. É delas que trataremos neste texto, para o qual tomamos como referências três trabalhos[15] escritos por Antonio Miguel, Dario Fiorentini e Maria Ângela Miorim[16].

ANTES DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

No Brasil, durante o século XIX e até nas três primeiras décadas do século XX, as disciplinas matemáticas eram ensinadas separada e sucessivamente na escola secundária, na seguinte ordem: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria, com programas, livros e professores diferentes. Não havia clareza em relação aos objetivos do ensino da matemática e tudo era considerado importante.

Foi somente em 1931 que um conjunto de decretos, que ficou conhecido como Reforma Francisco Campos, estabeleceu a primeira organização nacional da educação no Brasil. Para o ensino secundário, a legislação passou a prever uma única disciplina denominada Matemática, e gradativamente foram deixando de ser editados livros didáticos separados de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. Surgiram coleções de cinco ou quatro volumes para as cinco ou quatro séries que compunham o ginásio (cinco na Reforma Francisco Campos, quatro na Reforma Gustavo Capanema, ocorrida em 1942).

Nesse período, os tópicos ensinados na parte referente à Álgebra, tanto antes quanto depois da Reforma Francisco Campos, eram: cálculo algébrico (inclusive operações com polinômios), razões e proporções, equações e inequações do 1º grau, sistemas de equações, radicais (operações e propriedades), equações do 2º grau, trinômio do 2º grau, equações redutíveis ao 2º grau, problemas do 2º grau, sistemas de equações do 2º grau.

---

15 Trata-se dos seguintes artigos:
Miguel, A.; Fiorentini, D.; Miorim, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições,** v. 3, n.1 (7), p. 39-54, mar 1992.
Fiorentini, D.; Miguel, A.; Miorim, M. A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n.1 (10), p. 78-91, 1993.
Miorim, M. A.; Miguel, A.; Fiorentini, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, Campinas, n.1, mar. 1993, p. 19-39.

16 Miguel, Fiorentini e Miorim são professores da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

A abordagem utilizada era mecânica e automatizada, e considerava-se haver uma relação de complementaridade entre aritmética e álgebra: a álgebra, devido ao seu poder de generalização, era encarada como ferramenta mais potente que a aritmética, pelas suas possibilidades na resolução de problemas.

Na primeira concepção de educação algébrica, que foi praticamente hegemônica durante todo o século XIX e a primeira metade do século XX, tanto no Brasil como em outros países, prevalecia a crença de que a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo transformismo algébrico (entendido como o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes entre si mediante o emprego de regras e propriedades válidas) seria necessária e suficiente para que o aluno alcançasse a capacidade de resolver problemas. Considerava-se que a realização de manipulações algébricas de modo independente de objetos concretos ou ilustrações era uma condição necessária a uma álgebra "aplicada", ou seja, à resolução de problemas. A sequência de tópicos era estabelecida do seguinte modo: primeiramente, fazia-se o estudo das expressões algébricas; em seguida, abordavam-se as operações com essas mesmas expressões chegando, então, às equações; finalmente, as equações eram utilizadas na resolução de problemas.

Devido a essa característica de se investir na linguagem algébrica para depois resolver problemas, Fiorentini, Miguel e Miorim chamaram essa primeira concepção de linguístico-pragmática – aprendia-se uma linguagem para a prática da resolução de problemas.

Vamos ilustrar essa concepção por meio da apresentação de um exemplo de um livro de Álgebra[17] de 1928. Trata-se da explicação sobre a multiplicação de expressões algébricas, na qual, como se poderá observar, aborda-se o assunto mediante a apresentação de uma regra, que é imediatamente seguida de exemplos relativos à sua aplicação.

17 Pérez y Marín. **Elementos de Álgebra**, 6ª ed. São Paulo: Liceu Coração de Jesus, 1928, p. 35.

Quadro 1

Ensino da Álgebra: multiplicação de expressões algébricas

1º caso: Para multiplicar um monomio por outro, multiplicam-se os coefficientes e, em continuação, escrevem-se as letras, affectando cada uma de um expoente egual á somma dos expoentes que a mesma letra tem nos monomios, e ao producto obtido dá-se o signal que lhe corresponde, segundo a regra dos signaes.

Exemplos:

$$(3a^2b)\ (4ab^2c) = 12a^3b^3c;$$

$$(-\ 7xy)\ (5x^2z) = -\ 35\ x^3yz;$$

$$(5m^2n^4p^6)\ (-\ 5m\ n^3p^5r^4s) = -\ 25m^3n^7p^{11}r^4s;$$

$$(-\ 3a^3b^4c)(-\ 2a^4b^2c^2d) = 6a^7b^6c^3d.$$

2º caso: Regra. Para multiplicar um polynomio por um monomio, multiplica-se, pela regra do primeiro caso, cada um dos termos do polynomio pelo monomio, e sommam-se os productos parciaes.

É a mesma regra da multiplicação de uma somma e de uma differença indicada por um número, já demonstrada em arithmetica.

Exemplos:

$$(3\ a^3 - 4\ a^2b - 6ab^2 + 2b^3)2\ a^2b = 6\ a^5b - 8\ a^4b^2 - 12\ a^3b^3 + 4\ a^2b^4$$

$$(5\ x^3y - 2\ x^2y^2 + 9\ xy^3 - 4\ y^4)\ (\text{-}\ 3\ xy^2) = -\ 15\ x^4y^3 + 6\ x^3y^4 - 27x^2y^5 + 12\ xy^6.$$

DURANTE O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Do fim dos anos 1950 ao fim dos anos 1970, predominaram no Brasil as ideias desse movimento, que, ao defender a modernização dos conteúdos ensinados na matemática escolar, no sentido de se contemplarem temas desenvolvidos cronologicamente em um período mais recente, propunha a introdução de elementos unificadores dos campos da aritmética, da álgebra e da geometria, a exemplo da linguagem dos conjuntos e da apresentação das estruturas algébricas, como base para a construção lógica do edifício matemático. O movimento da matemática moderna destacava, ainda, a necessidade de conferir mais importância aos aspectos lógicos e estruturais da Matemática, opondo-se às características pragmáticas que predominavam no ensino da época, com a apresentação de regras sem justificativa e a mecanização dos procedimentos.

Como os avanços da Matemática desde o século XVIII haviam resultado de um processo de algebrização dos conteúdos clássicos de modo a tornar a ciência matemática mais rigorosa, precisa e abstrata, a álgebra assumiu lugar de destaque no movimento modernista. Desse modo, o ensino da aritmética, em vez de, como anteriormente, enfatizar as técnicas operatórias, passa a investir fortemente no estudo dos conjuntos numéricos, ordenados segundo sua complexidade estrutural. Os números naturais, inteiros, racionais e reais são progressivamente introduzidos no ensino, ressaltando-se as propriedades das operações com esses números, que compõem a base para os cálculos com eles.

A concepção de educação algébrica se transforma, em contraposição à concepção linguístico-pragmática dominante anteriormente. Como o papel da álgebra passa a ser o de fundamentar os vários campos da matemática escolar, Fiorentini, Miguel e Miorim conferem a essa concepção a denominação de fundamentalista-estrutural. A ideia que a norteava era a de que a introdução de propriedades estruturais dos números que justificassem logicamente cada passagem do transformismo algébrico capacitaria o estudante a aplicar essas estruturas nos diferentes contextos a que estivessem subjacentes.

Para mostrar o modo como se propunha a fundamentação do transformismo algébrico por meio das propriedades estruturais dos conjuntos numéricos, apresentamos, a seguir, a resolução de um exercício em um livro didático[18] que aderia fortemente ao ideário modernista.

Enunciado do exercício: Demonstre que $(a.b)$: $a = b$

Solução:

Transformações	Propriedades
$(a.b)$: $a =$	
$(b.a)$: $a =$	Comutativa
$= (b\ .a).\ 1/a =$	Definição do divisor em R^*
$= b.\ (a.1/a) =$	Associativa
$= b.1 =$	Produto de elementos inversos
$= b$	Elemento neutro

A concepção fundamentalista-estrutural levou a uma reorganização dos conteúdos algébricos (expressões algébricas, valores numéricos, operações, fatoração) no sentido de que eles fossem precedidos, no ensino, por “tópicos fundamentais”: conjuntos numéricos, propriedades estruturais, estudo dos quantificadores, sentenças abertas e fechadas, conjunto universo, conjunto verdade, equações e inequações do 1º grau, e sucedidos por “novos conteúdos algébricos”: funções, funções de 1º e 2ºgraus, etc.

18 O exemplo foi extraído de Gruema. **Curso moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau – 7ª série.** 3 ed. São Paulo: Nacional, 1977.

Para ilustrar essa forma de organização, que se contrapõe à do momento precedente, apresentamos, a seguir, a definição de equação em dois livros didáticos. A primeira definição é de antes do movimento da matemática moderna, e foi extraída de um livro publicado em 1928, enquanto a segunda está contida num livro do período em que se difundiam as ideias modernistas, editado em 1965. Eis as duas maneiras de se conceituar a equação nesses livros.

> Equação é toda igualdade que exprime uma relação entre as quantidades conhecidas e desconhecidas de um problema, sendo as quantidades conhecidas os dados do problema ou da equação e as quantidades desconhecidas as incógnitas[19].
>
> A toda sentença aberta, que encerra a relação de igualdade e que se torna verdadeira para determinados valores das variáveis, dá-se o nome de equação. Para que as sentenças se tornem verdadeiras é necessário que se dê às variáveis valores que pertençam a um determinado conjunto universo.[20]

A preocupação pragmática do ensino antigo, que fazia com que o conceito de equação viesse imediatamente associado à necessidade de resolver problemas, está ausente da segunda definição. Em seu lugar, coloca-se a ênfase na precisão matemática do conceito e na linguagem "adequada" para expressá-lo. Assim, antes que se chegasse à definição de equação, o estudante deveria digerir termos como "sentença aberta", "sentença numérica", "conjunto-universo", necessários, segundo os modernistas, à compreensão do conceito de equação.

DEPOIS DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

No final da década de 1970, surgiram críticas ao movimento da matemática moderna; no Brasil, essas críticas e a discussão sobre o fracasso do movimento fizeram parte de um contexto de renovação dos ideais educacionais estimulado pelo fim da ditadura militar. No que diz respeito ao ensino da álgebra, vê-se o aparecimento de uma nova concepção, que tenta, por um lado, recuperar o valor da álgebra como instrumento para resolver problemas, na perspectiva da concepção prevalecente antes do movimento da matemática moderna. Por outro lado, a nova concepção pretende também manter o caráter de justificação das passagens presentes no transformismo algébrico, ou seja, ela também é uma concepção de natureza fundamentalista. Entretanto, para se justificar as passagens, não mais se faz apelo às propriedades estruturais dos números, como na concepção fundamentalista-estrutural característica do movimento da matemática moderna. Na maior parte das vezes, as justificativas passam a ser baseadas em recursos analógicos geométricos e, portanto, visuais.

De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim, os adeptos dessa concepção acreditam que uma "álgebra geométrica", por tornar visíveis certas identidades algébricas, seria

19 Passagem retirada de Pérez y Marín. **Elementos de Álgebra**, 6ª ed. São Paulo: Liceu Coração de Jesus, 1928, p.15.

20 Zambuzzi, O. **Ensino Moderno da Matemática**. 4ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, v. 2, 1965, p. 87.

didaticamente superior a qualquer forma de abordagem estritamente lógico-simbólica. Isso, porém, não significa defender a tese determinista da impossibilidade de acesso do estudante a uma forma de abordagem meramente simbólica e mais abstrata, mas, simplesmente, acreditar que a etapa geométrico-visual constitui-se em um estágio intermediário e/ou concomitante à abordagem simbólico-formal.

Outro recurso analógico bastante frequente é a justificação de passagens algébricas mediante leis do equilíbrio físico, recorrendo-se a ilustrações de balanças ou gangorras.

Exemplos da presença dessa concepção, denominada fundamentalista-analógica por Fiorentini, Miguel e Miorim, são as situações em que os produtos notáveis, o cálculo ou a fatoração de expressões algébricas são apresentados com o apoio de ilustrações de quadrados e retângulos.

Por exemplo, para calcular o produto das expressões $2 + x$ e $3 + x$, propõe-se calcular a área de um retângulo de lados $2 + x$ e $3 + x$. Divide-se, então, o retângulo em quatro retângulos de lados: 2 e x; x e x; 3 e x; 3 e 2.

O produto, que representa a área A do retângulo, será a soma das áreas dos quatro retângulos:

$$A = (2 + x)\,(3 + x) = (x.x) + (2.x) + (3.x) + (2.3) = x^2 + 2x + 3x + 6$$

$$A = x^2 + 5x + 6.$$

Já o uso da balança pode ser constatado quando se apresenta a ideia de que, se a mesma operação for feita em ambos os membros de uma equação, a igualdade entre eles não é alterada. Como exemplo, podemos citar a situação em que se mostra a ilustração de uma balança de dois pratos em equilíbrio, na qual há uma caixa e um peso de $6\ kg$ em um deles, enquanto no outro há um peso de $16\ kg$ e outro de $6\ kg$.

Argumenta-se que a balança permanecerá em equilíbrio se retirarmos de ambos os pratos o peso de $6\ kg$. Essa situação é representada com a utilização da linguagem algébrica da seguinte maneira: se x é o peso da caixa, tem-se $x + 6 = 16 + 6$.

Retirando o peso de $6\ kg$ de ambos os pratos, teremos, devido ao equilíbrio da balança, $x = 16$. Assim, fica justificada a passagem de transformar uma equação em outra equivalente a ela, isto é, com a mesma solução.

Essa perspectiva de educação algébrica está bastante presente na atualidade em nosso país, e em várias coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental podemos encontrar exemplos que a ilustram. Assim, no livro *Matemática*[21], dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, no volume para o 7º ano, apresenta-se a ilustração de uma balança de dois pratos. Em um deles, estão cinco cubinhos marcados com a letra x e um cubo no qual está registrado o número 4. No outro, há dois cubinhos idênticos aos do primeiro prato, juntamente com um paralelepípedo marcado com o número 5. O leitor é convidado a associar a equação $5x + 4 = 2x + 5$ a essa imagem.

21 Imenes, L. M.; Lellis, M. **Matemática. 7º ano.** Guia do Professor. São Paulo: Moderna, 2010, p. 237.

Em seguida, o texto afirma que "tirando pesos iguais dos dois pratos, o equilíbrio se mantém", e prossegue assim:

> Na nossa equação, fazemos algo parecido: subtraímos $2x$ dos dois lados da igualdade.

$$5x + 4 = 2x + 5$$

$$3x + 4 = 5.$$

Do mesmo modo, é muito frequente a apresentação dos produtos notáveis e da fatoração com o apoio visual de figuras geométricas, e o leitor não encontrará dificuldades em localizar exemplos disso nas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental produzidas mais recentemente[22].

A concepção fundamentalista-analógica para a educação algébrica situa-se, assim, entre as perspectivas mais atuais. Contudo, como alertam Fiorentini, Miguel e Miroim, nessa terceira concepção, continua-se a conferir o papel principal às "regras algébricas", isto é, ao "transformismo algébrico". Assim, como ocorre com as duas concepções anteriores, a fundamentalista-analógica é uma perspectiva na qual o ensino da álgebra se reduz ao de sua linguagem. A visão da álgebra, nas concepções linguístico-pragmática, fundamentalista-estrutural e fundamentalista-analógica, é centrada na vertente simbólica, e, assim, o aspecto mais importante é a aprendizagem da manipulação dos símbolos. Na primeira concepção, a atenção está na manipulação realizada com base no treino; na segunda, o centro são as propriedades estruturais dos números para fundamentar as transformações a serem efetuadas; na terceira, procura-se a compreensão das regras pelo recurso a apoios intuitivos representados por ilustrações geométricas ou pelas leis físicas do equilíbrio. Entretanto, mesmo na terceira concepção, em que se busca dar significado às manipulações, a preocupação principal continua situada nos aspectos sintáticos, isto é, nas regras da linguagem algébrica. O que se pressupõe é que o domínio das regras possibilitará ao estudante aplicá-las corretamente a situações concretas.

OUTRA POSSIBILIDADE PARA A EDUCAÇÃO ALGÉBRICA: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Na atualidade, percebe-se uma tendência direcionada à ultrapassagem da ideia de que a aprendizagem da álgebra se reduz à aprendizagem e à manipulação correta das regras de sua linguagem, ou seja, de que "o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da Álgebra".[23] Essa visão, que confere destaque ao pensamento algébrico independentemente do domínio das regras da linguagem algébrica, tem se manifestado entre os pesquisadores em Educação Matemática desde a década de 1980. Por exemplo, o

22 Referimo-nos ao período posterior a 1998, ano de publicação, pelo Ministério da Educação, dos Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática para os últimos ciclos do Ensino Fundamental.

23 Conforme Fiorentini, D.; Miguel, A.; Miorim, M. A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n.1 (10), 1993, p. 85.

autor norte-americano James Kaput referiu-se ao pensamento algébrico como "algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais[24]." Esse processo de generalização pode ocorrer em contextos aritméticos ou geométricos e mesmo em qualquer conceito matemático abordado desde o início da escolarização.

Segundo Dario Fiorentini, Antonio Miguel e Maria Ângela Miorim, em seu artigo denominado *Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica elementar*, o pensamento algébrico tem alguns elementos caracterizadores: a percepção de regularidades, a percepção, em determinada situação, de aspectos invariantes, em contraste com outros que variam, as tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema, a presença do processo de generalização.

O processo de generalização, isto é, o processo de descoberta e comprovação de propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos, é um elemento central. No pensamento algébrico, dá-se atenção não apenas aos objetos, mas, sobretudo, às relações entre esses objetos, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato. Por isso, um dos caminhos privilegiados para o desenvolvimento dessa forma de pensar é o estudo de regularidades em uma situação dada[25].

Fiorentini, Miguel e Miorim destacam que o pensamento algébrico não se manifesta exclusivamente nos campos da Matemática, mas também em outras áreas do conhecimento. Consideram, ainda, que não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico, isto é, esse pensamento pode ser expresso mediante a linguagem natural, a linguagem aritmética, a linguagem geométrica ou uma linguagem específica, criada para esse fim – a linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica.

Essas ideias trazem novas perspectivas para o trabalho pedagógico, segundo esses autores, porque, se por um lado não há razão para se sustentar que o ensino-aprendizagem da álgebra deva ter início relativamente tarde na escolarização, já que o pensamento algébrico não depende de uma linguagem estritamente simbólico-formal para se manifestar, por outro lado não podemos nos esquecer de que esse pensamento se potencializa à medida que, gradativamente, o estudante desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele. Nesse sentido, se a introdução precoce e sem uma base significativa de uma linguagem simbólico-abstrata pode embaraçar a aprendizagem da álgebra, o menosprezo ao modo de expressão simbólico-formal constitui-se também em impedimento para seu pleno desenvolvimento.

Fiorentini, Miguel e Miorim propõem, então, que, numa primeira etapa da educação algébrica, se trabalhe com situações-problema de naturezas diversas, de modo que os alunos tenham a oportunidade de experimentar os elementos caracterizadores do pensamento algébrico destacados anteriormente neste texto. Esse trabalho em

24 De acordo com Ponte, J. P.; Branco, N.; Matos, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC) do Ministério da Educação de Portugal, 2009, p. 10.

25 Também segundo Ponte, Branco e Matos, op. cit.

relação ao modo de conduzir e expressar o pensamento para resolver tais situações é que dará ensejo à construção de uma linguagem simbólica que seja significativa para o estudante. Trata-se de chegar às expressões simbólicas mediante a análise de situações concretas.

Numa segunda etapa, a ideia é a realização do percurso inverso, isto é, propõe-se apresentar expressões algébricas e solicitar ao aluno que lhes atribua um significado.

É somente na terceira etapa que se deve enfatizar o transformismo algébrico, isto é, a transformação de uma expressão algébrica em outra equivalente a ela, por meio do estudo dos procedimentos que legitimam essas transformações.

Segundo os três autores, a ordem dessas etapas não é rígida, isto é, é possível e desejável que as etapas se interpenetrem, de modo que o estudante possa simultaneamente desenvolver o pensamento algébrico e aprender a linguagem algébrica com significado.

Nessa perspectiva de ensino em que o desenvolvimento do pensamento algébrico tem papel tão destacado, favorece-se uma iniciação ao pensamento algébrico desde as primeiras etapas da escolarização, pelo "estudo de sequências e regularidades (envolvendo objectos diversos), padrões geométricos, e relações numéricas associadas a importantes propriedades dos números[26]."

Nas perspectivas centradas na linguagem algébrica, a atividade dos alunos durante o ensino-aprendizagem da álgebra escolar é essencialmente resolver exercícios e, eventualmente, alguns problemas. Já em uma concepção que salienta a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico (sem que se negligencie o papel primordial da linguagem), a atividade que o aluno realiza é de outra natureza, "desenvolvendo-se a partir de tarefas de cunho exploratório ou investigativo, em contexto matemático ou extra-matemático[27]."

26 Ponte, Branco e Matos, op. cit., p. 15.

27 Ponte, Branco e Matos, op. cit., p. 15.

ATIVIDADES REFERENTES À UNIDADE 3

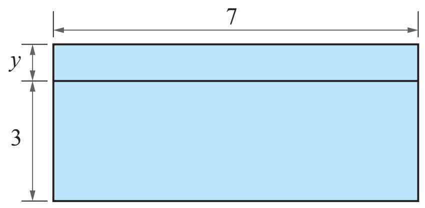
PRIMEIRA PARTE:

A concepção fundamentalista-analógica de ensino da álgebra

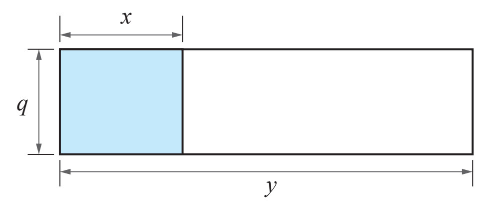
Atividade 1

Expresse de duas maneiras a área das figuras. A que conclusão se pode chegar em cada caso?

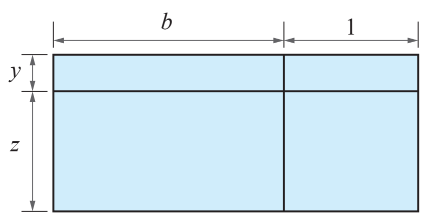
a)



b) (A área não-sombreada)



c)



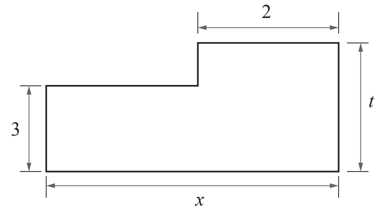
Atividade 2

Usando retângulos, represente geometricamente as expressões:

a) $b\,x + 2\,x$
b) $5\,d + 5\,e + 10$.

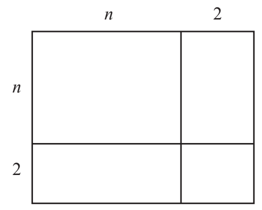
Atividade 3

Encontre três expressões para a área da figura abaixo.

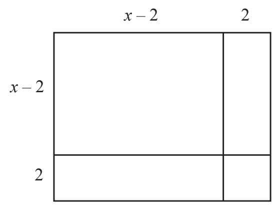


Atividade 4

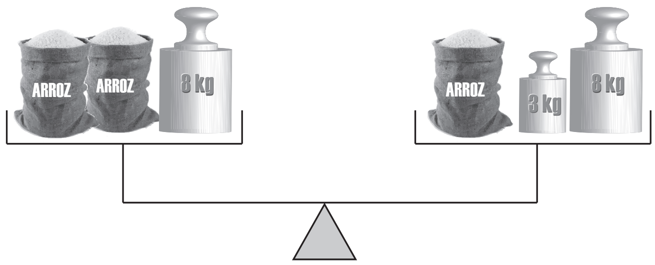
a) Na figura abaixo, usando áreas, calcule $(n + 2)^2$. Explique com suas palavras o raciocínio que você usou.



b) Na figura abaixo, usando áreas, encontre $(x - 2)^2$. Explique com suas palavras o raciocínio que você usou.



Atividade 5



A balança acima está em equilíbrio e os três sacos de arroz têm o mesmo peso. Retirando-se as mesmas coisas dos dois pratos da balança, ela mostrará diretamente quantos quilogramas pesa um só saco de arroz.

a) Para isso acontecer, o que deve ser retirado de cada prato? Faça um desenho representando essa situação.
b) Se a é o peso do saco de arroz em quilogramas, escreva uma equação representando a situação da figura dada e uma equação representando a figura que você desenhou no item a).

Atividade 6

Desenhe uma balança em equilíbrio para representar a equação

$$x + 6 = x + x + x + 2.$$

(Imagine que a incógnita é o peso de uma lata).

Atividade 7

Desenhe uma balança de dois pratos em equilíbrio na qual se tem a seguinte situação. Num dos pratos, há um pacote que pesa $3\ kg$ e mais três peças de chumbo.

No outro prato, há uma peça de chumbo igual às primeiras e mais dois pacotes de açúcar, um pesando $10\ kg$ e o outro pesando $13\ kg$.

a) Descreva uma maneira informal para determinar o peso de cada peça de chumbo. Faça um desenho e explique o seu raciocínio.
b) Expresse a situação da balança original em equilíbrio por meio de uma equação.
c) Escreva também uma equação para expressar o que você descreveu e desenhou no item a).

Atividade 8

Um saco de laranjas e um saco de maçãs pesam juntos $54\ kg$. O saco de laranjas pesa $12\ kg$ a mais que o de maçãs.

a) Desenhe duas balanças em equilíbrio representando as condições acima.
b) Para cada balança desenhada no item a), escreva uma equação que expresse a situação.

Atividade 9

Uma lata de azeite e uma garrafa de vinho pesam juntas $40\ kg$, e sabe-se que 2 latas de azeite e 7 garrafas de vinho pesam $230\ kg$.

a) Desenhe balanças que representem as condições acima.
b) Escreva um sistema de equações que represente a situação.

SEGUNDA PARTE:

A perspectiva de desenvolvimento do pensamento algébrico – Observação de regularidades e generalização

Atividade 1

$\nabla \quad \otimes \quad \nabla \quad \otimes \quad \nabla \quad \otimes \quad \ldots$

As figuras acima representam uma sequência. Cada figura é um elemento da sequência.

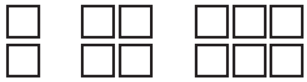
a) Qual é o 8º elemento da sequência? Por quê?
b) Sem desenhar, qual é o 20º elemento da sequência? Por quê?
c) Qual figura estaria na 15ª posição? E na 19ª posição? Você conseguiria dizer em quais outras posições estaria essa mesma figura?
d) Para organizar os dados obtidos complete a tabela:

Figura	Posições							
∇	1ª	3ª	5ª					
$\otimes$	2ª	4ª	6ª					

e) Em quais posições o triângulo aparece? E a bolinha? Justifique.
f) Elabore uma pergunta que você poderia fazer aos seus alunos sobre a sequência. Explique o que você entende ser importante verificar que os alunos compreendem ao responder essa pergunta.

Atividade 2

Observe a sequência de figuras abaixo e responda às questões a seguir.

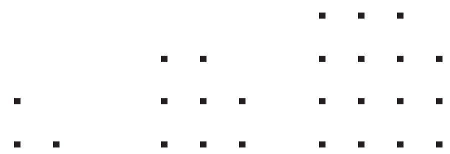


a) Desenhe as duas próximas figuras da sequência.
b) Qual a quantidade de quadradinhos da 6ª figura da sequência? E da 7ª?
c) Sem desenhar, quantos quadradinhos a 10ª figura teria? E a 15ª? E a 23ª? Por quê?
d) Para organizar os dados obtidos complete a tabela a seguir. Na última linha da tabela você deverá introduzir uma expressão algébrica.

Posição	Número de quadradinhos
1ª	2
2ª	4
3ª	
4ª	
5ª	
6ª	
7ª	
8ª	
9ª	
10ª	
...	...
n	

e) Elabore uma pergunta que você acharia interessante fazer aos seus alunos sobre a sequência, explicando o que você pretenderia avaliar da compreensão deles sobre ela.

Atividade 3



Observe as figuras acima e responda às questões propostas.

a. Continuando a sequência acima, desenhe a próxima figura.

b. Desenhe agora a 5ª figura. Quantos pontos ela tem?

c. Qual a quantidade de pontos da 6ª figura? Por quê?

d. Qual a quantidade de pontos da 20ª figura? Por quê?

e. Para organizar os dados obtidos complete a tabela a seguir. Na última linha da tabela você deverá introduzir uma expressão algébrica.

Posição da figura	Número de pontos
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
...	...
20	
...	
n	

f. Um aluno, João, disse que a expressão algébrica $n^2 + 2n$ representa o número total de pontos em cada figura. Você concorda com ele? Faça um desenho mostrando a maneira como ele está contando os pontos.

g. Outra aluna, Alice, encontrou a expressão $n(n+1)+n$. Essa expressão está correta? Em caso afirmativo, esboce um desenho representando a maneira como Alice está contando os pontos.

h. A expressão encontrada por João é equivalente à de Alice? Justifique a sua resposta.

i. Dê outras expressões algébricas equivalentes que possam representar o número total de pontos em qualquer das figuras.

Atividade 4

Um restaurante possui mesas quadradas iguais para 4 lugares. Se juntarmos 2 mesas, teremos lugar para 6 pessoas. Se juntarmos 3 mesas (numa única direção), teremos lugar para 8 pessoas

a) Desenhe a situação apresentada para 1 mesa, 2 mesas e 3 mesas.

b) Se juntarmos linearmente 5 mesas, teremos lugar para quantas pessoas?

c) Sem fazer o desenho, se juntarmos 20 mesas quantos lugares existem nas cabeceiras das mesas? E fora das cabeceiras? Qual a quantidade total de lugares disponíveis?

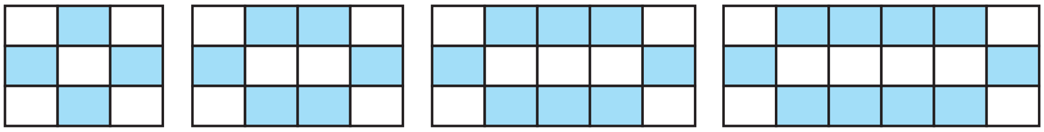
d) Agora complete a tabela a seguir com os dados obtidos.

Número de mesas	Lugares nas cabeceiras	Lugares fora das cabeceiras	Total de lugares disponíveis
1	2	2	4
2	2		
3		6	8
4			
5			
...	...	...	...
20			
...	...	...	...
n			

e) Indique o número necessário de mesas para que se tenha 102 lugares disponíveis.

Atividade 5

Sara construiu uma sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo:



Responda às perguntas seguintes, explicando o seu raciocínio com palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

a) Represente a 5ª e a 6ª figuras desta sequência.

b) Quantos azulejos, no total, a 50ª figura tem?

c) Que figura da sequência tem, no total, 81 azulejos?

d) Complete a tabela a seguir para organizar os dados. Na última linha da tabela, você deve introduzir uma expressão algébrica.

Número da figura	Número de azulejos cinzentos	Número de azulejos brancos	Número total de azulejos
1			
2			
3	8	7	15
4			
5			
6			
...			
n			

e) Jorge sugeriu a Sara que a expressão algébrica $(n+2)(n+2)(n+2)$ representa o número total de azulejos em cada figura. Você concorda com ele? Justifique sua resposta.

f) Marta, por sua vez, indicou a expressão algébrica $3\times(n+2)$. Essa expressão é equivalente à do Jorge? Justifique sua resposta.

g) Indique outras expressões algébricas equivalentes que possam representar o número total de azulejos em cada figura.

h) Recorrendo à expressão algébrica de Marta, $3\times(n+2)$:

1) Determine os termos de ordem 18 e 53. Na situação apresentada nesta tarefa, o que representam os valores obtidos?

2) Indique a ordem do termo da sequência que tem 294 azulejos.

Álgebra e Funções na Educação Básica_ok.indd 49 15/07/2013 17:06:59

4

Erros em Álgebra

UNIDADE 4: ERROS EM ÁLGEBRA

Este texto é uma adaptação de um capítulo do livro *Iniciación al Algebra*[28], de autoria de Martin Manuel Socas e outros autores. Na primeira parte, são focalizados aspectos gerais relacionados aos erros usualmente cometidos em álgebra. A segunda parte aborda mais especificamente os erros na resolução das equações, enquanto a terceira discute brevemente como os erros podem auxiliar os docentes na condução do ensino da álgebra e sugere estratégias a serem usadas pelos professores para que os erros sejam superados.

1. GENERALIDADES

O conhecimento dos erros básicos em álgebra é importante para o professor porque lhe dá informações sobre o modo como os alunos interpretam os problemas e sobre como utilizam os diversos procedimentos algébricos. Essas informações podem sugerir formas de ajudar os alunos a corrigir esses erros e, ao mesmo tempo, lhe mostram as possíveis causas das dificuldades dos estudantes para aprender álgebra.

Uma pesquisa interessante, que procurou identificar os tipos de erros mais comuns e também identificar as causas de tais erros, foi realizada pelo grupo de álgebra do projeto Strategies and Errors in Secondary Mathematics (SESM), do Reino Unido, entre 1980 e 1983. Os estudantes envolvidos nessa pesquisa tinham entre treze e dezesseis anos e, apesar das diferenças de idade e de ter passado por diferentes experiências escolares em álgebra, cometiam, em todos os níveis, erros similares. O termo álgebra era considerado no sentido de "aritmética generalizada", o que implica o uso de letras para números e a escrita de expressões gerais que representam regras aritméticas e expressões dadas.

O projeto SESM teve como centro de interesse analisar mais a natureza dos erros cometidos pelos alunos do que o tipo de questões que eles resolvem corretamente, e, especialmente, os casos em que esses erros são cometidos por um grande número de estudantes. Da análise desses erros comuns, observamos que muitos deles podiam ser atribuídos a aspectos tais como:

a) a natureza e o significado dos símbolos e das letras;

b) o objetivo da atividade e a natureza das respostas em álgebra;

c) a compreensão da aritmética por parte dos estudantes;

d) o uso inapropriado de "fórmulas" ou de "regras de procedimentos".

28 Socas, M. M. et al. **Iniciación al Algebra**. Madrid: Editorial Síntesis, 1996.

Os três primeiros aspectos geram erros que se originam na transição conceitual da aritmética para a álgebra, enquanto que o quarto se deve fundamentalmente a falsas generalizações sobre operadores ou números.

A) A NATUREZA E O SIGNIFICADO DOS SÍMBOLOS E DAS LETRAS

As mudanças conceituais são um fator importante na ocorrência de erros. Às vezes, os alunos têm dificuldades em assumir mudanças conceituais convencionais e precisam se conscientizar de que existem novas situações diante das quais seu conhecimento é inadequado e inapropriado. A maior mudança conceitual na aprendizagem da álgebra se localiza em torno de sua diferença em relação à aritmética: significado dos símbolos e interpretações das letras.

Os símbolos são um recurso que permite denotar e manipular abstrações. Uma das teorias iniciais dos estudantes seria o reconhecimento da natureza e do significado dos símbolos para poder compreender como operar com eles e como interpretar os resultados. Esse conhecimento lhes permitiria a transferência de conhecimento aritmético até a álgebra, aceitando as diferenças entre ambas. A falta de entendimento sobre o significado dos valores simbólicos pode levá-los a dar $7x$ como resposta de $3x + 4$, o que tem a ver com sua interpretação do símbolo da operação. Em aritmética, o símbolo + é interpretado como uma ação a realizar, isto é, + significa realizar a operação.

Tall e Thomas[29] (1991) argumentam que, provavelmente, os alunos consideram que ab tem o mesmo significado que $a + b$ devido aos significados parecidos de "e" e "mais" na linguagem natural. A ideia de que o símbolo da soma pode indicar o resultado, e não a ação, não é facilmente apreendida pelos alunos, embora essas duas noções sejam necessárias para o conhecimento da álgebra. Outra explicação frequentemente proposta para essa tendência dos estudantes é a de que eles apresentam uma dificuldade cognitiva para aceitar a falta de fechamento. Eles percebem expressões abertas como incompletas e tendem a "terminá-las"[30].

Para trabalhar com valores simbólicos, o estudante precisa ampliar o conceito de notação usado para as operações aritméticas. Às vezes, os alunos reduzem a comprovação da validade de uma transformação algébrica à comprovação da verdade aritmética de um exemplo. A ambiguidade notacional e a dualidade em álgebra provocam confusão na conexão entre a evolução simbólica e numérica.

Em aritmética, a concatenação é usada na associação do valor do algarismo à sua posição, no sistema de numeração decimal que utilizamos ("cada lugar um valor"). Um erro típico em álgebra é concluir que, se $x = 6$, $4x = 46$. Também na notação de número misto, quando se denota implicitamente a adição como 4 ¾, se originam

29 Tall, D. O.; Thomas, M. O. J. Encouraging versatile thinking in álgebra using the computer. **Educational Studies in Mathematics.** 11, p.125-147, 1991.

30 Conforme Booth, L.; Cook, J. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: Coxford, A. F.; Shulte, A. P.(Org.). **As idéias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

erros como escrever $xy = 8$, dados $x = -3$ e $y = -5$. Seria aconselhável não omitir o sinal da multiplicação muito cedo quando se trabalha com produtos algébricos, pois isso ajudaria a evitar esses erros.

No que se refere à maturação do conceito de igualdade, aparece uma mudança conceitual mais crítica. Diferentemente da situação com outros valores simbólicos, essa mudança claramente implica a extensão de um conceito existente mais do que a aquisição de um conceito totalmente novo, especialmente porque as características de "=" em aritmética e em equações algébricas compartilham a mesma notação.

Em aritmética, o sinal "=" é usado para conectar um problema a seu resultado numérico e, com menor frequência, para relacionar dois processos que dão o mesmo resultado, como

$$4 + 7 = 11 \text{ ou } 3 \times 4 = 6 + 6,$$

ou para unir a sequência de passos que conduzem a um resultado final como

$$2 \times (6 - 4) = 2.\ 2 = 4,$$

isto é, o sinal de igual tem sempre um sentido unidirecional que precede a uma solução numérica.

Os alunos, às vezes, transferem esse significado do sinal "=" à álgebra e o confundem com o "=" da equação

$$3\,x + 3 = 2\,x + 7.$$

As equações, diferentemente das expressões aritméticas anteriores, não são afirmações verdadeiras universalmente, isto é, o sinal "=" não conecta identidades, mas obriga a incógnita a tomar um valor específico para que a expressão seja verdadeira. Esse sentido bidirecional do sinal de igual, que pode ser, às vezes, mais um indicador de uma relação de equivalência do que um sinal para escrever a solução, não costuma ser facilmente interiorizado pelos alunos. No próximo parágrafo, veremos os problemas colocados pelo sinal "=" nas equações.

Um exemplo de erro frequente é o seguinte

$$\frac{3}{2+x} + \frac{7x}{x-1} = 3$$

$$3(x-1) + 7x(2+x) = 3$$

É como se o aluno fizesse a transformação

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} \longrightarrow AD + BC$$

no lado esquerdo, esquecendo-se do denominador comum e do significado de equivalência do sinal de igual.

Finalmente, uma das diferenças mais óbvias entre a aritmética e a álgebra reside no significado das letras. As letras também aparecem em aritmética, porém de forma diferente: “m” e “g”, por exemplo, podem ser usadas em aritmética para representar metros ou gramas, mais do que para representar o número de metros ou o número de gramas, como em álgebra, embora o aspecto mais significativo se encontre na ideia da letra como variável. Inclusive, quando os alunos interpretam letras que representam números, há uma tendência em considerar as letras mais como valores únicos e específicos, como em $a + 5 = 9$, do que como números generalizados ou como variáveis, como em $a + b = b + a$ ou $A = b.\ a$.

B) O OBJETIVO DA ATIVIDADE E A NATUREZA DAS RESPOSTAS EM ÁLGEBRA

O centro da atividade do aluno em aritmética é achar soluções numéricas concretas; entretanto, em álgebra não é assim. O objetivo é a obtenção de “relações” e “processos” e a formulação dos mesmos em expressões gerais simplificadas. É certo que uma razão fundamental para obter tais relações e processos é usá-los como “fórmulas” ou “regras de procedimentos” para resolver problemas adequados que nos permitam encontrar a solução numérica, mas esse não é o objetivo imediato. Muitos estudantes não se dão conta disso e supõem que nas questões algébricas sempre se lhes exige uma solução única e numérica.

A ideia da resposta de um único termo parece ser a causa de erros cometidos frequentemente pelos alunos que simplificam uma expressão como 3x + 5y para 8xy. Esse problema pode aparecer porque os estudantes têm uma dificuldade cognitiva para aceitar a falta de fechamento de uma resposta como 3x+ 5y, ou simplesmente reflete uma situação derivada da aritmética, referente àquilo que se supõe que deva ser uma “resposta bem dada”, como foi comentado na seção anterior.

C) A COMPREENSÃO DA ARITMÉTICA POR PARTE DOS ESTUDANTES

A álgebra não está separada da aritmética; com efeito, ela é, em grande parte, aritmética generalizada. Daí que, para entender a generalização de relações e processos, requer-se que eles sejam assimilados primeiramente no contexto aritmético. Às vezes, as dificuldades que os estudantes apresentam em álgebra não são tanto dificuldades na própria álgebra, mas sim em problemas que não foram corrigidos em aritmética. Situações da aritmética em que as ideias dos alunos influem na álgebra são, por exemplo, as frações, o uso dos parênteses, as potências etc.

Assim, os alunos que não dominam as operações com frações e dão resultados como

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

logo os traduzem erroneamente para o campo algébrico.

Também surgem muitos erros ao se calcular incorretamente o menor denominador comum ou na obtenção de frações equivalentes. Por exemplo, para somar $\frac{3}{28}+\frac{8}{35}$, cometem-se os seguintes erros:

$$\frac{3}{28}+\frac{8}{35}=\frac{3+8}{4.7.5}.$$

Outras vezes, com a preocupação de não esquecer os fatores pelos quais é preciso multiplicar os numeradores, omitem-se os numeradores originais:

$$\frac{3}{28}+\frac{8}{35}=\frac{5+4}{4.7.5}$$

O sinal "-", sobretudo quando é colocado diante de um parêntesis ou de uma fração, gera frequentes erros como

$$-(a+b)=-a+b$$

$$-\frac{a+b}{c}=\frac{-a}{c}+\frac{b}{c}.$$

Nesse grupo, podemos considerar também os erros devidos a generalizações incorretas de propriedades aritméticas, que abordaremos nas seções d_1, d_2 e d_3.

Na maioria dos erros cometidos em aritmética, os alunos refletem dificuldades na interiorização de um conceito ou falta de percepção. Por exemplo, nos erros do tipo $(-1)^4 = -4$, multiplicam em vez de efetuar a potenciação.

D) O USO INAPROPRIADO DE "FÓRMULAS" OU "REGRAS DE PROCEDIMENTOS"

Alguns erros se devem ao fato de que os alunos usam inadequadamente uma fórmula ou regra conhecida que extraíram de um protótipo ou livro-texto e que usam tal qual as conhecem ou as adaptam incorretamente a uma situação nova. Constroem, assim, uma ponte para preencher o vazio entre regras conhecidas e problemas não-familiares. A maioria desses erros se origina a partir de falsas generalizações sobre operadores ou sobre números. Os primeiros se devem à falta de linearidade desses operadores.

A linearidade descreve uma maneira de trabalhar com um objeto que pode ser decomposto tratando-se independentemente cada uma de suas partes. Um operador é empregado linearmente quando o resultado final de aplicá-lo a um objeto se consegue aplicando o operador a cada subparte e depois se combinam os resultados parciais.

A linearidade é bastante natural para muitos alunos, já que suas experiências anteriores são compatíveis com a hipótese de linearidade. Analisaremos aqui cinco grupos de erros:

d_1) erros relativos ao mau uso da propriedade distributiva;

d_2) erros relativos ao mau uso de inversos;

d_3) erros de cancelamento;

d_4) erros devidos a falsas generalizações sobre números;

d_5) erros devidos ao uso de métodos informais por parte dos estudantes.

d_1) Erros relativos ao mau uso da propriedade distributiva

Os primeiros erros que encontramos podem dever-se a uma aplicação incorreta dessa propriedade, tal como em $a.\ (b + c) = a.\ b + c$, chegando alguns alunos, inclusive, a aplicar corretamente a propriedade quando o valor que multiplica está à esquerda, e não saber o que fazer se esse valor está à direita, ou seja, sabem que $a.\ (b + c) = a.\ b + a.\ c$, mas não têm segurança sobre $(a + b).\ c$.

Com muita frequência encontramos os seguintes erros:

$$\sqrt{A+B} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$$
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$
$$a(b.c) = (a.b).(a.c)$$

$$\frac{A}{B+C}=\frac{A}{B}+\frac{A}{C}$$

Em geral, esses erros aparecem quando uma expressão algébrica é decomposta linearmente distribuindo-se o operador principal a cada parte das expressões.

Uma justificação desses fatos poderia vir do fato de que, quando ao aluno se explica que $A\ (B + C) = A.\ B + A.\ C$ e $A\ (B - C) = A.\ B - A.\ C$, ele pode ser levado a acreditar que esse tipo de coisa vale sempre. Inclusive, pode recordar-se de outros exemplos, como

$$\sqrt{A.B}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$$

$$\frac{B+C}{A}=\frac{B}{A}+\frac{C}{A}$$

para os quais isso é válido, e generaliza a propriedade. Por isso, é muito importante ressaltar quando e em relação a que se verifica a propriedade distributiva; por exemplo, destacar que a raiz quadrada é distributiva em relação à multiplicação, mas não em relação à adição.

Russell, Schifter e Bastable[31] argumentam que muitos professores de álgebra notam que os alunos cometem os mesmos erros e que esses erros podem ser persistentes, apesar de inúmeras tentativas para corrigi-los. Para as autoras, é provável que os estudantes que os cometem vejam uma semelhança dos padrões dos símbolos com outros, que representam regras corretas.

Estudantes que cometem o erro $(a+b)^2=a^2+b^2$ podem estar interpretando o expoente como um número que se comporta como um fator, de tal modo que $(a+b)^2$é visto como $2(a+b)$. Pode ser, ainda, que os alunos compreendam o significado do expoente, mas não sejam capazes de aplicar a propriedade distributiva nesse caso.

Quando os alunos escrevem $a\ (bc) = (ab)\ (ac)$, podem estar aplicando a regra "multiplique tudo o que está dentro dos parênteses pelo número que está fora dos parênteses", o que funciona para $a\ (b + c)$, mas não para $a\ (bc)$. Nesse último caso, eles aplicam incorretamente a propriedade distributiva e não reconhecem a propriedade associativa.

31 Russell, S.; Schifter, D.; Bastable, V. Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In: Cai, J.; Knuth, E. (Ed.). **Early algebrization: a global dialogue from multiple perspectives.** Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.

d_2) Erros relativos ao mau uso de inversos

Esses erros aparecem, geralmente, como consequência dos erros em aritmética que já citamos. Ao se somar frações algébricas, surgem resultados como

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a+b}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a.b}$$

Também é frequente, na resolução de equações em que a variável está no denominador, o seguinte:

de $\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{7}$, deduzir-se que $3 = x + 7$.

Esse tipo de erro pode vir induzido de situações como

$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$, que dá $x = 2$, ou

$\frac{x}{3}=\frac{5}{3} \Rightarrow x = 5$ ou ainda

$\frac{a}{3}+\frac{b}{3}=\frac{a+b}{3}$,

das quais se deduz que com os recíprocos se pode trabalhar sempre de modo igual.

d_3) Erros de cancelamento

Nesse grupo estariam erros do tipo

$\frac{Ax+By}{x+y}=A+B$, que provavelmente derivam da regra $\frac{Ax}{x}=A$, dando origem a diversas situações como

$$\frac{9x+6}{6}=9x \text{ ou}$$

$$\frac{4x-3}{4}=x-3,$$

que podem ser obtidas por analogia com

$$\frac{3}{3.x}=\frac{1}{x},$$

Esses tipos de erro parecem indicar que os alunos generalizam procedimentos que se verificam em determinadas condições.

Tanto os erros de cancelamento como os referentes aos inversos poderiam ser evitados se o aluno tivesse modificado a situação para que ela se encaixasse com a regra, em vez de estender a regra para abarcar a nova situação. Para os erros sobre os recíprocos, a solução poderia ser igualar uma fração à outra, encontrando o denominador comum e depois expressando a soma de frações como uma só fração.

Do mesmo modo, se o aluno tivesse tirado o fator comum nos problemas de cancelamento, a regra já conhecida poderia ter sido aplicada; caso não se encontrasse um fator comum, isso implicaria que a regra usual não pode ser aplicada e não que se deve encontrar outra forma de usar a regra. Por outro lado, podemos distinguir ainda mais dois tipos de erros.

d_4) Erros devidos a falsas generalizações sobre números

A necessidade de generalizar sobre números em álgebra surge com muitíssima frequência, pois permite formular uma regra geral a partir de um problema-exemplo com números especiais. Na solução de um problema como

$$
\begin{aligned}
&(x-7)(x-5)=0 \Rightarrow x-7=0\\
&ou\\
&x-5=0 \Rightarrow x=7\\
&ou\\
&x=5
\end{aligned}
$$

embora o 7 e o 5 não sejam críticos para o procedimento, o 0, sim, o é. A generalização correta que poderia ser feita não pode dispensar o zero: é verdade que

$$
\begin{aligned}
&(x-a)(x-b)=0 \Rightarrow x-a=0\\
&ou\\
&x-b=0 \Rightarrow x=a\\
&ou\\
&x=b
\end{aligned}
$$

Os alunos, sem ter isso em conta, fazem outro tipo de generalização, produzindo o seguinte resultado, que não vale para k ≠ 0:

$$
\begin{aligned}
&(x-a)(x-b)=k \Rightarrow x-a=k\\
&ou\\
&x-b=k \Rightarrow\\
&x=a+k\\
&ou\\
&x=b+k
\end{aligned}
$$

Nos exemplos a seguir, os números 0 e 1 são os que aparecem como especiais. Das expressões *A . 1* = *A* e *A* + *0* = *A*, vêm erros como *A. 0* = *A*. De *A* + *(-A)* = *0* se origina o erro $A.\dfrac{1}{A}=0.$

d_5) O uso de métodos informais por parte dos estudantes

Os alunos não usam, geralmente, os métodos matemáticos formais ensinados em sala de aula, e costumam empregar com bastante frequência métodos informais próprios, tanto no ensino primário como no ensino secundário. Esses métodos parecem ter êxito na resolução de questões simples, mas não podem ser estendidos a problemas mais complicados, e seu uso tem implicações negativas na habilidade dos estudantes para elaborar ou entender enunciados gerais em álgebra. Por exemplo, se um estudante, para encontrar o número total de elementos em dois conjuntos de 27 e 32 elementos, não usa a noção de soma, representando-a por $27 + 32$, mas resolve o problema mediante uma contagem, talvez sejam poucas as possibilidades de que represente por $x + y$ o número total de elementos de dois conjuntos de x e y elementos. Aqui, a dificuldade não está tanto na generalização do exemplo aritmético, mas sim na de se ter um procedimento apropriado e a representação desse procedimento em aritmética a partir do qual generalizar.

2. ERROS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

A maior parte dos erros cometidos na resolução de equações se deve às causas assinaladas anteriormente. Vejamos alguns exemplos.

a) Erros que se originam na transição conceitual da aritmética para a álgebra

- Os alunos calculam incorretamente o mínimo múltiplo comum dos denominadores ou erram ao fazer os cálculos depois que o encontram. Assim, em

$$\frac{x}{3} + 7x = 3 + \frac{x}{9}\text{, fazem}$$

$$\frac{x}{9} + 63x = 27 + \frac{x}{9}\cdot$$

- Os alunos efetuam operações no primeiro membro da equação sem modificar o segundo: em $3x + 5 = 7$, fazem $3x + 5 – 5 = 7$, donde $3x = 7$, ou ainda, em $x^2 + 4x = 5$, para obter o quadrado perfeito, somam quatro unidades somente ao primeiro membro: $x^2 + 4x + 4 = 5$, chegando a

  $(x + 2)^2 = 5$.

- Os alunos trocam o sinal de um dos membros da equação sem modificar o outro: em $–2x + 3 = 5$, multiplicam por $– 1$ somente o primeiro membro, obtendo: $2x – 3 = 5$.

Nesses últimos erros, observa-se que a causa principal está, como já foi dito, no desconhecimento do significado do sinal de igual nas equações. Assim, os estudantes trabalham uma parte da igualdade sem ver a necessidade de modificar o outro membro da mesma maneira.

Na resolução de equações, procede-se de cima para baixo mediante transformações sucessivas, não de uma única expressão, mas de uma relação entre expressões (equação), que são transformadas aplicando-se as mesmas operações a ambos os lados. Embora essas operações não mantenham a igualdade dos lados correspondentes de linhas sucessivas, elas conservam o valor da incógnita. Por exemplo, na resolução da equação

$$\frac{4}{x}=\frac{6}{2x-1},$$

o primeiro e o segundo membros não são iguais ao primeiro e ao segundo membros da equação obtida quando a multiplicamos pelo produto dos denominadores, chegando a

$$x(2x-1)\frac{4}{x}=x(2x-1)\frac{6}{2x-1}$$

O mesmo acontece com o primeiro e o segundo membros dessa segunda equação em relação ao primeiro e ao segundo membros da equação $8x-4=6x$, etc, ainda que em ambos os casos se conserve o valor da incógnita.

Para equações simples como $2x = 6$, é fácil encontrar o valor da incógnita reformulando a equação, mas para equações mais complexas, a obtenção da incógnita requer simplificações sucessivas por meio de transformações e reduções apropriadas. Nesse sentido, os alunos devem observar as linhas na resolução da equação para determinar:

1) a natureza de cada transformação;
2) a relação entre os novos lados esquerdo e direito da equação;
3) a igualdade ou desigualdade dos lados correspondentes consecutivos, isto é, as relações entre os lados direito e esquerdo consecutivo, respectivamente.

Consequentemente, trabalhar com equações requer, por um lado, interpretar o sinal de igual que aparece explicitamente, e, por outro lado, reconhecer expressões equivalentes quando não são dadas.

b) Uso inapropriado de fórmulas ou regras de procedimentos

Algumas vezes, os erros decorrem de falsas generalizações sobre operadores como o mau uso da propriedade distributiva: a partir de $3\,(x+2) = 7\,x$, os alunos escrevem $3\,x + 2 = 7\,x$. Outras vezes, os erros se originam de simplificações incorretas, como, de $\frac{x+2}{2}=5$, deduzir-se que $x = 5$. Erros na solução de equações aparecem, também, devido ao mau uso dos inversos: de $\frac{1}{3x+5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{7}$, chega-se a $3\,x + 5 = x + 7$.

Outras vezes ainda, os erros produzidos por falsas generalizações sobre números repercutem na resolução de equações; por exemplo, ao resolver

$$\frac{3}{x} + x = 0,$$

os alunos obtêm $3 + x^2 = 0$ e, analogamente, quando o segundo membro é outro número, agem como se fosse zero: de $\frac{3}{x} + x = 10$ obtêm $3 + x^2 = 10$, acabando por resolver uma equação diferente da equação dada.

Também são frequentes procedimentos do seguinte tipo: se $(x - 3)(x - 5) = 7$, então $x - 3 = 7$ e $x - 5 = 7$, ou ainda, de $x^2 = -3x$ tem-se $x = -3$, omitindo-se a solução $x = 0$.

Existem ainda erros específicos na aplicação de métodos ou fórmulas de resolução para a equação do segundo grau ou para sistemas de equações. São erros que refletem mais um descuido de realização do que mal entendidos reais. É o caso de, para $x^2 - 3x = 6$, escrever-se $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 24}}{2}$, ignorando-se os sinais dos coeficientes da equação.

Outro erro frequente ocorre quando os alunos vão verificar as soluções de um sistema e, em vez de fazer isso nas equações originais, fazem-no nas equações mais simples obtidas por manipulações (que podem ser errôneas) das primeiras: em

$$\frac{2}{3}x + y = 1$$

$$4x - 3y = 1$$

eliminam incorretamente os denominadores na primeira equação e obtêm

$$2x + 3y = 1$$

$$4x - 3y = 1.$$

Em seguida, aplicam o método de redução, obtendo a solução $x = 3$, substituem esse valor na primeira equação e encontram $6 + 3y = 1$; $y = -5/3$. Para comprovação, usam o segundo sistema, em vez do primeiro, verificando a exatidão das soluções.

Finalmente, como já indicamos anteriormente, os alunos usam, com bastante frequência, métodos informais próprios, e esses geram dificuldades na resolução de equações, sobretudo naquelas que apresentam certa complexidade. Ao considerar exemplos tais como:

1) $x + 7 = 20$
2) $4x + 3 = 7x$
3) $5x + 4 = 6x$
4) $3x + 2 = 14$,

os alunos costumam obter facilmente a solução por "métodos operacionais" próprios da aritmética. No caso 1), x tem que ser 13 pela decomposição de 20 como 13 + 7. No caso 2), 3 tem que ser igual a $3x$ por ser o que falta a $4x$ para valer $7x$, e daí $x = 1$. Em 3), 4 se identifica com o x que falta a $5x$ para o total $6x$; no caso 4), os alunos decompõem o segundo membro de maneira semelhante ao primeiro, obtendo

$3x + 2 = 12 + 2$ e, portanto, $x = 4$.

Evidentemente, se o problema se complica, esses métodos informais geram erros; assim em $\frac{x+2}{x+5} = \frac{6}{7}$, os alunos respondem que x pode ser 4 e 2, já que resolvem a equação igualando os numeradores e denominadores: $\frac{x+2}{x+5} = \frac{4+2}{2+5} = \frac{6}{7}$.

3. CORREÇÃO DE ERROS

Quando iniciam o estudo da álgebra, os alunos já têm familiaridade com os procedimentos para resolver problemas de aritmética. Mesmo aqueles que já dominam esses procedimentos podem apresentar dificuldades na transição da aritmética para a álgebra. Russell, Schiefter e Bastable[32] atribuem essas dificuldades a uma falta de conhecimento sobre as propriedades e o comportamento das operações. Segundo essas pesquisadoras, na melhor das hipóteses, os estudantes podem compreender essas propriedades no contexto da aritmética, mas não conseguem estender esse conhecimento para o contexto algébrico. Na pior das hipóteses, pode ser que eles tenham memorizado corretamente os procedimentos, mas não compreendem como eles funcionam ou qual a relação que mantêm com as propriedades das operações.
Para tentar vencer essas dificuldades, as autoras propõem um estudo explícito das operações, isto é, os procedimentos de cálculo devem ser abordados como objetos matemáticos que podem ser descritos geralmente em termos de suas propriedades e de seus comportamentos. Isso não significa a simples apresentação dos nomes das propriedades nem das propriedades como regras, mas que os alunos devem usar representações ou mesmo estórias para descrever o comportamento das operações.

A análise de erros, como indicamos, tem interesse duplo: por um lado, serve para ajudar os professores a conduzir melhor o ensino-aprendizagem da álgebra, insistindo naqueles aspectos em que os alunos cometem erros; por outro lado, contribui para uma melhor preparação de estratégias para a correção desses erros. Nesse sentido, o professor deve entender os erros específicos de seus alunos como uma informação das dificuldades da álgebra, que requerem um esforço preciso nessas duas direções, entendendo-se obviamente que, se ao se detectar um erro, o aluno reconhece imediatamente a falha e a corrige, passando a aplicar a correção a todos os casos, não será necessário nenhum remédio. Se, ao contrário, o erro se produz com certa frequência, é mais do que um simples descuido, fazendo-se necessária uma atenção mais precisa.

32 Op. cit.

A superação dos erros por parte dos alunos constitui um tema básico na aprendizagem o qual gera grandes dificuldades. As investigações atuais indicam que os erros estão profundamente interiorizados pelos alunos e que não são de fácil eliminação. Inclusive, em muitos casos, parece que os estudantes já superaram um determinado erro e depois o vemos, com desilusão, ressurgir em pouco tempo. Por isso, mostrar aos estudantes que sua compreensão conceitual de uma parte da álgebra é incorreta e dar-lhes uma explicação sobre isso é, frequentemente, insuficiente para eliminar o erro.

O estudante deve participar ativamente no processo de superar seus próprios erros; para isso, o professor deve provocar conflito em sua mente a partir da inconsistência dos seus erros, forçando-o a participar ativamente na resolução do conflito, substituindo os conceitos falsos pela compreensão conceitual adequada. O professor deve raramente indicar a seus alunos qual é a resposta correta; deve pedir-lhes comprovações e provas com a intenção de provocar contradições que resultam de falsos conceitos dos estudantes. A partir daí, eles devem ser dirigidos a conseguir resolver a contradição mediante a solicitação de mais comprovações e provas. O objetivo não é tanto fazer com que os estudantes escrevam a fórmula ou regra de procedimento adequada, mas fazê-los enfrentar a contradição e eliminar seus falsos conceitos de forma que não voltem a aparecer.

Outra vantagem dessa forma de tratar o problema, já que é muito pouco provável que toda a turma esteja ao mesmo tempo de acordo com a resposta correta, é que na sala de aula são geradas discussões excelentes não só para mostrar os diferentes conceitos falsos que os estudantes possam ter, mas também para ajudá-los a superar tais conceitos falsos por intermédio de suas próprias intervenções.

ATIVIDADES REFERENTES À UNIDADE 4

Atividade 1

Baseando-se na primeira parte do texto (Generalidades), examine os erros em álgebra apresentados a seguir. De acordo com as ideias discutidas no texto, argumente sobre as possíveis razões para os erros cometidos em todos os itens. Atenção: o objetivo da atividade não é a correção dos erros, mas sim a produção da argumentação referida.

1.1) $(y + 2z)^2 = y^2 + 4z^2$

1.2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$a + 4 = 2$

$a = -2$

1.3) $(x - 2)\,(x - 3) = 1$

$x - 2 = 1$ ou $x - 3 = 1$

$x = 3$ ou $x = 4$

1.4) $3x + 4 = 7x$

1.5) $2a + 6b = 8ab$

1.6) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{p+q}$

1.7) $4.\,(a.3) = (4.a).\,(4.3)$

1.8) $\frac{2y - 3}{3} = 8$

$2\,y = 8$

$y = 4$

Atividade 2

Com suas próprias palavras, explique o que você compreendeu sobre cada um dos tipos de erros causados pelo uso inadequado de "fórmulas" ou "regras de procedimentos" apresentados na primeira parte do texto (Generalidades):

2.1 erros relativos ao mau uso da propriedade distributiva;

2.2 erros relativos ao mau uso de inversos;

2.3 erros de cancelamento;

2.4 erros devidos a falsas generalizações sobre números;

2.5 erros devidos ao uso de métodos informais por parte dos estudantes.

Atividade 3

Em cada uma das equações abaixo, identifique qual o erro presente nas passagens apresentadas. Descreva cada erro, associando-o às interpretações quanto aos motivos de sua ocorrência feitas no texto.

3.1) $\frac{x}{3}+7x=3+\frac{x}{9} \Leftrightarrow \frac{x}{9}+63x=27+\frac{x}{9}$

3.2) $8\,(x+3)=51$

$8x+3=51$

$8x=48$

$x=6$

3.3) $\frac{x+2}{2}=5 \Leftrightarrow x=5$

3.4) $\frac{1}{3x+5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{7} \Leftrightarrow 3x+5=x+7$

3.5) $\frac{3}{x}+x=10 \Leftrightarrow 3+x^2=10$.

Atividade 4

Resolva corretamente cada uma das equações:

a) $\frac{x}{3}+7x=3+\frac{x}{9}$ b) $8\,(x+3)=51$ c) $\frac{x+2}{2}=5$

d) $\frac{1}{3x+5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{7}$ e) $\frac{3}{x}+x=10$.

Atividade 5

Escolha duas das equações da Atividade 4 e descreva como você faria para convencer um aluno de que as passagens apresentadas na Atividade 3 não estão corretas.

Atividade 6

a) Relacione o conteúdo do texto com a sua experiência. Você já teve a oportunidade de ver alunos que cometeram algum dos erros apresentados no texto? Em sua opinião, quais desses erros são mais frequentes? Você concorda com as explicações do texto acerca desses erros? Por quê?

b) Como você analisa a proposta do texto sobre a correção dos erros? Concorda? Discorda? Justifique sua resposta.

REFERÊNCIAS

BOOTH, L.; COOK, J. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

DINIZ, M. I. S; REAME, E. **Álgebra: das variáveis às equações e funções.** São Paulo: CAEM-IME-USP, 1994.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica elementar. **Pro-Posições,** v. 4, n.1 (10), p. 78-91, 1993.

GRUEMA. **Curso moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau – 7ª série.** 3 ed. São Paulo: Nacional, 1977.

GRUPO AZARQUIEL. **Ideas y actividades para enseñar álgebra.** Madrid: Editorial Síntesis, 2007.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática. 7º ano.** Guia do Professor. São Paulo: Moderna, 2010.

KATZ, V. Stages in the history of algebra with implications for teaching. **Educational Studies in Mathematics**. 66: 185-201, 2007.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições,** v. 3, n.1 (7), p. 39-54, mar 1992.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké***,* Campinas, n.1, mar. 1993, p. 19-39.

PÉREZ y MARÍN. **Elementos de Álgebra**, 6ª ed. São Paulo: Liceu Coração de Jesus, 1928.

POLCINO MILIES, F. C. **Breve história da álgebra abstrata**. Salvador: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. Disponível em www.bienasbm.ufba.br/M.18.pdf. Acesso em 10 março 2011.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC) do Ministério da Educação de Portugal, 2009**.**

PONTE, J. P.; MATOS, A.; BRANCO, N. **Sequências e Funções: Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3º ciclo-7º ano**. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC) do Ministério da Educação de Portugal, 2009**.**

PUIG, L. Componentes de uma historia del álgebra. El texto de al-Khwârismî restaurado. In: Hitt, F. (ed**.)**. **Investigaciones em matemática educativa II**. México, D. F.: 1998. Grupo Editorial Iberoamérica, p. 109-131.

PUIG, L.; ROJANO, T. The history of algebra in mathematics education. In: STACEY, K.; CHICK, H.; and KENDAL, M. (eds.). **The Future of the Teaching and Learning of Algebra**. Boston: Kluwer, 2004, p. 189-223.

RUSSELL, S.; SCHIFTER, D.; BASTABLE, V. Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In: Cai, J.; Knuth, E. (Ed.). **Early algebrization: a global dialogue from multiple perspectives**. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.

SOCAS, M. M. et al. **Iniciación al Algebra**. Madrid: Editorial Síntesis, 1996.

STACEY, K; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds.). **The Future of the Teaching and the Learning of Algebra**. Boston: Kluwer, 2004.

TALL, D. O.; THOMAS, M. O. J. Encouraging versatile thinking in álgebra using the computer. **Educational Studies in Mathematics**. 11, p.125-147, 1991.

TINOCO, L.A.A. (Coord.) **Álgebra: pensar, calcular, comunicar...** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ, 2008.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A.P.(Org). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

ZAMBUZZI, O. **Ensino Moderno da Matemática**. 4ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, v. 2, 1965.

Composto em caracteres Aller, Arial, Calibri, PT Sans e Times New Roman.
Editorado pelo Centro de Apoio à Educação a Distância da UFMG (CAED-UFMG).
Capa em Supremo, 250g, 4 X 0 cores - Miolo Off Set 120g, 2X2 cores.
2013